



講義ノートの周辺

Part III 数と計算

1. 自然数

森 隆一

$\alpha \beta \gamma \delta \epsilon (\epsilon) \zeta \eta \theta (\vartheta) \iota \kappa \lambda \mu \nu \xi \omicron \pi (\varpi) \rho (\varrho) \sigma \varsigma \tau \upsilon \phi (\varphi) \chi \psi \omega$

$\Gamma \Delta \Theta \Lambda \Xi \Pi \Sigma \Upsilon \Phi \Psi \Omega$

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z

a b c d e f g h i j k l m n o p q r s u v w x y z

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z



目次

第1章	自然数	1
1.1	位取りと記数法	1
1.1.1	10進記数法	1
1.1.2	2進表記	2
1.2	四則演算	5
1.2.1	足し算と繰り上がり	5
1.2.2	引き算と繰り下がり	6
1.2.3	掛け算	8
1.2.4	割り算	9
1.2.5	10進表記から2進表記へ	10
1.2.6	コイン投げの標本空間	11
1.3	p 進表記	14
1.3.1	p 進表記	14
1.3.2	大きい桁小さい桁	16
1.3.3	数詞と数を含む用語	19
1.3.4	算木・算盤	22
1.3.5	二十八宿一覧	23

第1章 自然数

1.1 位取りと記数法

3231 を、一が1個、十が3個、百が2個、千が3個あることと理解し、
‘さんぜん・にひゃく・さんじゅう・いち’ と読む
ことは、10進記数法 と言われている。

1.1.1 10進記数法

上の 3231 0 から 9 までの数字 $0, 1, \dots, 9$ をならべたものの例といえる。数字を並べたものという意味で、 $\boxed{3} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{1}$ と枠で囲って書き表すと便利なこともある。

このように、 $0, 1, \dots, 9$ の数を n 個並べたものを $a_{n-1} \cdots a_1 a_0$ とする。
枠付きで書けば

$$\boxed{a_{n-1}} \cdots \boxed{a_i} \cdots \boxed{a_1} \boxed{a_0}$$

となる。

ここで、枠を桁と呼ぶことにする。右端の枠を1位の桁といい、ここに書かれている数を1位の数という。右端の1つ左の枠を10位の桁といい、ここに書かれている数を10位の数という。なお、 $10^0 = 1$ 、 $10^1 = 10$ で

あることを注意すれば、 i 番目の枠を 10^{i-1} 位の桁、そこに書かれている数を 10^{i-1} 位の数という。

10^{i-1} 位の桁に書かれている数は a_i なので、この桁の表す数は $a_i 10^{i-1}$ となる。したがって、 $a_{n-1} \cdots a_1 a_0$ の表す数は

$$a_0 + a_1 10 + \cdots + a_i 10^{i-1} + \cdots + a_{n-1} 10^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 10^i$$

となる。

1.1.2 2進表記

2進表記に関して、ここで取り挙げるような内容は Part II で寄り挙げて

“2進表記で $b_{n-1} \cdots b_1 b_0$ と表される数は、

$$b_0 + b_1 2 + \cdots + b_i 2^{i-1} + \cdots + b_{n-1} 2^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$$

と表される。” ということが言えればいいと思う。

上は不充分と思う人がいるかもしれない。筆者も言い足りない思いを抱いている。

対称は倭の式における $\sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$ についてである。

$b_{n-1} \cdots b_1 b_0 = 1101001$ に対して $\sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$ を(くそ)丁寧に計算してみる。

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 \\ &= 1 + 2^3 + 2^5 + 2^6 \\ &= 1 + 8 + 32 + 64 = 105 \end{aligned}$$

ここで、最後の行の各行は10進表記で書かれていることが対象である。

この辺りの話をするためには、‘(自然)数とは’や‘計算とは’について、まず述べることになる。教科書では、‘○○の性質’と書かれている部分になる。‘キチン’と説明す

るのは難しいから、‘良い’かげんに読んで先に進み、必要を感じたときに戻ってくればよい。

指折り

指を折って数えることはふつう馬鹿にされる。

しかし、個数確かめるときや慎重に数えるときに指を折ることをする人はいるのではないか。

‘3日後は何曜日’とか‘次の火曜日は何日か’とか確かめるとき、筆者は指を折って数えている。このとき、片手で行っている。すなわち、親指から順に1・2・3と折っていき、6以降は小指から順に起こしていく。この方法では10に関する補数と同じ折れ方になるが、何とかやっている。

指折りを2進表記とみることを考えてみよう。すなわち、指を折った状態を0、指を伸ばした状態を1と対応させて、2進表記とみなすことである。

このとき、片手では5桁になるから、0から $2^5 - 1 = 31$ までの数を表すことができる。また、両手では10桁になるから、0から $2^{10} - 1 = 1023$ までの数を表すことができる。

実際に指を動かしてみると、各指を単独に動かすのは中々難しい。毎年講義ノートを見直すときに練習をする程度だが、10年程たてば右手は一応動く程度にはなったが、いち・にー・さん…に合わせて動かすのには程遠い状況である。

指が効い用に動くことが必要な職業としては、マジシャンや楽器奏者特に(金)管楽器奏者やピアニストを思いつく。彼らがどの程度できるであろうか。

歴史 Wikipedia「二進数」から抜粋引用する。

中国には古くから易の八卦や六十四卦があり、それぞれ 3 ビットと 6 ビットに相当している。易経の六十四卦の配列は対応する整数の順になっていて、それらを $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow 64$ と進展させる加一倍の法を 11 世紀の儒学者邵雍が考案した。ただし、彼らがそれを整数（ないし、数）に対応するとして理解していたという証拠はない。その配列はそれぞれが二種類の値をとる要素の 6 タブルを辞書式順序に並べたものと見ることもできる。

インドの学者ピングアラ (Pingala, 紀元前 200 年頃) は韻律を数学的に表現する方法を考案し、それが現在知られている最古の二進法の記述の一つとされている。

同様の二進法的組合せの使用は、アフリカのヨルバ人が行っていた占い Ifa にもあり、中世ヨーロッパやアフリカのジオマンシーにも見られる。2 を底とする体系はサハラ以南のアフリカでジオマンシーに長く使われていた。

1605 年、フランシス・ベーコンはアルファベットの文字を 2 種の記号の列で表す体系を論じ、任意の無作為なテキストで微かに判別可能なフォントの変化に符号化できるとした。一般理論として彼が指摘した重要な点は、同じ方法をあらゆる物に適用できるという点であり、「2 種類の異なる状態をそれらの物で表現できればよく、鐘、トランペット、光、松明、マスカット銃など同様の性質があればどんなものでもよい」とした。これをベーコンの暗号（英語版）と呼ぶ。

数学的に二進法を確立したのは 17 世紀のゴットフリート・ライプニッツで、“*Explication de l'Arithmetique Binaire*” という論文も発表している。ライプニッツは現代の二進法と同じく、1 と 0 を使って二進法を表した。ライプニッツは中国愛好家でもあり、後に「易経」を知って、その八卦に 000 から 111 を対応させ、彼の賞賛してきた中国の哲学的数学の偉大な成果の証拠だとした。

1800 年代中頃、イギリスの数学者ジョージ・ブールがブール代数（ブール論理）により、二進的な数（ここで言う「数」は、数学的な広義の意味であり、普通の二進法の対象である、数値という意味ではない）の代数による命題論理の形式化を示した。

1936-1937 年の中嶋章と榛沢正男による「継電器回路に於ける単部分路の等価変換の理論」、1937 年のクロード・シャノンによる“A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits”（英語版）により相次いで、リレーのようなスイッチング素子による回路（デジタル回路）の設計がブール代数によって行えることが示され、1940 年代に始まり今日まで続くコンピュータの理論の基礎のひとつとなっている。

1.2 四則演算

1.2.1 足し算と繰り上がり

$7 + 8 = 15$ という式、あるいは、“7 に 8 を加えると 15 になる” ということを考えてみる。これを

$$7 + 8 = 7 + (3 + 5) = (7 + 3) + 5 = 10 + 5 = 15$$

としてみる。ここで、3 は 7 に足して 10 になる数として求めた。隣りの数だけで実行すれば、

$$7 + 8 = 8 + 7 = 9 + 6 = 10 + 5 = 15$$

とも書き直せる。

この 10 を 1 として 10 位の桁に食えることを繰り上がりという。

ここで、 $15 = 1 \times 10 + 5$ としてみる。今言える (書ける) のは、“左辺は自然数としての 15 で、右辺は 10 進表記で 15 に対応する数である” 程度である。

上の説明は 前節 (1.1.2) 2 進表記 のところで述べたものを 10 進表記で言い直したものである。したがって、前節での注意はほぼ適用できる。

少し付け加えることにする。“左辺は自然数としての 15” というのは、自然数の集合を 0 から始めることにして、その 16 番目の数ということである。

数学の本や論文のタイトルで ‘○○空間における△△’ というものがある。これは、幾つかの出来ることを設定し、その設定の下で何が成り立つのかをものである。球技における球戯場とルールと似ている。

1.2.2 引き算と繰り下がり

玉入れの例では、ゲームが終わったとき、赤 (A) チームの籠には玉が2個残っていた。

このとき、赤玉は青玉より多いといい、さらに、赤玉は青玉より2個多い、あるいは赤玉の個数は青玉の個数より2大きいという。

‘個数’から個を取って‘数’の段階になるのが次のテーマとなる。数という概念の抽象化と言って良いのかもしれない。

ここで、 $35 - 7$ を足し算と同様に (ちょっと雑ではあるが)

$$\begin{aligned} 35 - 7 &= (20 + 10 + 5) - 7 = 20 + 5 + (3 + 7) - 7 = 20 + 5 + 3 + (7 - 7) \\ &= 20 + 8 \end{aligned}$$

と書いてみた。10の位の1を10として、これから1の位をひくことを繰り下がりという。

似た響きを持つ用語に桁落ち・桁下がりがある。

Wikipedi「誤差」桁落ちでは

桁落ち (cancellation) とは、値がほぼ等しく丸め誤差を持つ数値同士で減算したり、絶対値がほぼ等しく符号が異なる数値を加算した時に、有効数字が減少すること。

特に、浮動小数点数では上位の桁がゼロになると正規化によって下位の桁に "0" を強制的に挿入するため、以降の計算において下位の桁が意味が無いものになる。

例

有効数字8桁で $\sqrt{1001} - \sqrt{999}$ を計算する。

$$\sqrt{1001} = 31.6385840 \dots \simeq 31.638584, \sqrt{999} = 31.6069612 \dots \simeq 31.606961$$

式の通りに計算すると、

$$\sqrt{1001} - \sqrt{999} \simeq 31.638584 - 31.606961 = 0.031623$$

有効数字が5桁になってしまう。有効数字が8桁なので元々は $\pm 0.00000005\%$ 程度の誤差であったが、計算後は $\pm 0.00005\%$ 程度 (本来の約1000倍) の誤差を含むことになる。

桁落ちの問題が発生する原因は、計算対象の値がすでに最下位桁に丸め誤差を含む近似値である点にある。上記の例では、差の上位3桁が0になり、計算結果に比べて丸め誤差が相対的に大きな誤差になってしまう。もし、これらの計算対象の値が丸め誤差を含まない値であれば、結果も全く誤差を含まない。また、桁落ちが発生すると有効桁数が減少するが、浮動小数点数においては正規化によって有効桁数が見かけ上回復する。正規化後の値をさらに別の計算に使用すると、その計算結果は見かけどおりの有効桁数を持たない。

乗除算や加算(符号が異なる減算)では有効桁数の減少が起きないため桁落ちは発生しない。正規化を行わない固定小数点数では桁落ちは発生しない。固定小数点数でも丸め誤差が累積する問題は発生するが、それは桁落ちとは異なる問題である。桁落ちは演算式の変形によって避けられることがある。上記の例の場合、以下のように式変形することで、ほぼ等しい数値同士の減算を避け有効数字8桁の結果を得られる。ただし、常にこのような回避が可能であるわけではない。

$$\begin{aligned} & \sqrt{1001} - \sqrt{999} \\ = & \frac{(\sqrt{1001} - \sqrt{999})(\sqrt{1001} + \sqrt{999})}{\sqrt{1001} + \sqrt{999}} = \frac{2}{\sqrt{1001} + \sqrt{999}} \\ \simeq & \frac{2}{31.638584 + 31.606961} = \frac{2}{63.245545} \simeq 0.031622781 \end{aligned}$$

同 情報落ち では、

浮動小数点数の計算のように精度が限られている条件下で、絶対値の大きい数と絶対値の小さい数を加減算したとき、絶対値の小さい数が無視されてしまう現象。次のような例がある。有効桁数が11桁ある場合では

$$2.0000000000 \times 10^{10} + 1.0000000000 = 2.0000000001 \times 10^{10}$$

と期待する結果が得られるが、有効桁数が10桁までしか無い場合は

$$2.0000000000 \times 10^{10} + 1.0000000000 = 2.0000000000 \times 10^{10}$$

となってしまう。

1.2.3 掛け算

a 、 b が 10 の倍数の場合 (右端に 0 が並んでいる場合) は足す回数を減らすことができる。

例として、 120×2100 の計算を考える。この場合、先ず 0 を忘れて、 $12 \times 21 = 252$ を計算したあと、忘れていた 3 つの 0 を右に並べて、252000 と殆どの人がすると思う。この経過を式で表すと次のようになる。

$$\begin{aligned} 120 \times 2100 &= (12 \times 10) \times (21 \times 10^2) \\ &= (12 \times 21) \times 10^3 = 252 \times 10^3 = 252000 \end{aligned}$$

となる。

上の最後に行っている “252 の右に 0 を付け加える” という操作を考える。この場合は、百位の数 2 を千位に、十位の数 5 を百位に、一位の数 2 を十位に移した後空いた一位を 0 とする操作といえる。一般的に述べれば、 n 桁の 10 進表記 $a_{n-1} \cdots a_1 a_0$ に対して、 $b_i = a_{i-1}$ ($i = n, n-1, \dots, 1$)、 $b_0 = 0$ で与えられる $b_n b_{n-1} \cdots b_1 b_0$ を $a_{n-1} \cdots a_1 a_0$ の**桁ずらし (シフト)** という。

上の繰り返し操作では、最上位の桁から始めて 1 位の桁まで順に行った。

桁を箱と考えれば、10 進表記は左側にはいくらでも連結可能な箱の列に 0 から 9 の数字を 1 つずつ入れたものと見ることができる。このとき、桁ずらし (左シフト) は次のようになる。

- 先ずは、左端の左に箱を 1 つ追加する。
- 次に左から 2 番目の箱 (元の最高位桁) の中身を左端に移し空にする。この段階で空白の右には元のものから最上位桁を除いたものが並んでいる。
- 以下空白の箱の右の箱に対し、この操作を右端の箱が空白になるまで続ける。
- 再以後に右端に 0 を入れる。

筆算においては、 12×21 は次のような計算を行っている。

$$12 \times 21 = 12 \times (2 \times 10 + 1) = 12 + (12 \times 2 \times 10)$$

2進表記においては2の倍数(偶数)の場合も同様である。

1.2.4 割り算

ここでは、自然数(= 非負整数)の(整数)除算を見ていく。

数学の教科書では

$$a = qb + r \quad (q \geq 0, 0 \leq r < b)$$

と表されるとき、 q を商 (quotient)、 r を剰余 (remainder、residue) という。また、 $a \div b = q$ 余り r とも書く。

計算では q を求めることになるが、 $a \geq b$ としてよい。

$a < b$ の場合は、 $q = 0$ 、 $r = a$ となる。

上の式より、 $r = a - qb$ となり、 r の不等式に代入すれば、

$$0 \leq a - qb < b \quad \text{より} \quad qb \leq a < (q+1)b$$

を得る。筆算はこれを満たす q を見付けることが基本となっている。

また、この式は qb は a に等しいか小さい b の倍数の最大のものであることを意味している。言い換えれば、 q は a の中に b が幾つあるかを意味している。これから、次の q と r を求める(手間はかかるが)簡単な計算法がみちびかれる。

ここでは、計算の主要部分を BASIC 風を書くことにする。プログラムとして実行するには a 、 b の値を設定することが必要である。

$c = a ; d = 0$

$\text{while } (c \geq b) \ c = c - b ; d = d + 1$

$c < b$ となって終了するはずである。このとき、 c が余り r で、 d が商 q となる。

プログラムは簡単であるが、実行時間はかかる。

かつては、このようなプログラム専門家には不況であったが、あるとき、最近では CPU の高速化に伴いバブル・ソートも見直されているということを知った。

1.2.5 10 進表記から 2 進表記へ

前項で取り挙げた $\sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$ の計算は、2 進表記から 10 進表記への変換を与えるものとみることができる。

逆に、10 進表記から 2 進表記への変換は次の手順で実行できる。

1 回目 m を 2 で割り、商を m_1 余りを b_0 $m = 2m_1 + b_0$

2 回目 m_1 を 2 で割り、商を m_2 余りを b_1 $m_1 = 2m_2 + b_1$

...

m_i はいつかは 0 になる。 n 回目に初めて 0 になったとすると、この n が桁数になり、 $b_{n-1} \cdots b_1 b_0$ が 2 進表記になる。

$m = 10$ の場合

1 回目 $10 \div 2 = 5$ 余り 0 $10 = 2 \times 5$ $m_1 = 5, b_0 = 0$

2 回目 $5 \div 2 = 2$ 余り 1 $5 = 2 \times 2 + 1$ $m_2 = 2, b_1 = 1$

3 回目 $2 \div 2 = 1$ 余り 0 $2 = 2 \times 1$ $m_3 = 1, b_2 = 0$

4 回目 $1 \div 2 = 0$ 余り 1 $1 = 2 \times 0$ 余り 1 $m_4 = 0, b_3 = 1$

10 の 2 進表示は 1010

$m = 2012$ の場合

1回目	$2012 \div 2 = 1006$ 余り 0	$2012 = 2 \times 1006$	$m_1 = 1006, b_0 = 0$
2回目	$1006 \div 2 = 503$ 余り 0	$1006 = 2 \times 503$	$m_2 = 503, b_1 = 0$
3回目	$503 \div 2 = 251$ 余り 1	$503 = 2 \times 251 + 1$	$m_3 = 251, b_2 = 1$
4回目	$251 \div 2 = 125$ 余り 1	$251 = 2 \times 125 + 1$	$m_4 = 125, b_3 = 1$
5回目	$125 \div 2 = 62$ 余り 1	$125 = 2 \times 62 + 1$	$m_5 = 62, b_4 = 1$
6回目	$62 \div 2 = 31$ 余り 0	$62 = 2 \times 31$	$m_6 = 31, b_5 = 0$
7回目	$31 \div 2 = 15$ 余り 1	$31 = 2 \times 15 + 1$	$m_7 = 15, b_6 = 1$
8回目	$15 \div 2 = 7$ 余り 1	$15 = 2 \times 7 + 1$	$m_8 = 7, b_7 = 1$
9回目	$7 \div 2 = 3$ 余り 1	$7 = 2 \times 3 + 1$	$m_9 = 3, b_8 = 1$
10回目	$3 \div 2 = 1$ 余り 1	$3 = 2 \times 1 + 1$	$m_{10} = 1, b_9 = 1$
11回目	$1 \div 2 = 0$ 余り 1	$1 = 2 \times 0 + 1$	$m_{11} = 0, b_{10} = 1$

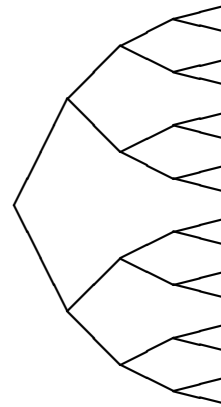
2012 の 2 進表示は 11111011100

1.2.6 コイン投げの標本空間

コイン投げの結果は、1を表0を裏に対応させることにより、0と1の列として表すことができる。なお、 n 回のコイン投げの起き得る結果(試行)の総数は 2^n である。また、起き得る結果全体の集合を標本空間という。

4回のコイン投げの標本空間は $2^4 = 16$ の要素からなる。16個ならば大した手間もなく書き上げることが出る。実際、ビット列(左)や樹形図(右)が用いられている。

0000	0100	1000	1100
0001	0101	1001	1101
0010	0110	1010	1110
0011	0111	1011	1111



左のビット列の表は次のようにして作成した。

まず左上端に 0000 を置く。そのしたに 1 を 2 進足し算で加えた 0010 をおく。以下同様に 1 を 2 進足し算で加えていく。途中で、4 つ目毎に列を改め上から書いていき、1111 を書いたら終わることになる。間違いなく実行出来たら、1111 を書いた時点で 16 個を書きことになっている。

左の 2 列の左端はすべて 0 で、右の 2 列の左端はすべて 1 となっている。左の 2 列から左端の 0 を取り除いたものと右の 2 列の 1 を取り除いたものとは一致している。

右の樹形図をそれぞれが 4 つの線分から成る 16 本の折れ線が重なって描かれているものとみる。

線分は右上がりと右下がりの 2 種類に分かれる。右上がりの線分には 0 を付け、右下がりの線分には 1 を付ける。ここで、各折れ線に対して構成している線分に付された数を左から順に並べれば、4 個のビット列が得られる。

例えば、右端が一番上の折れ線には 000 が対応し、いちばん下の折れ線には 1111 が対応している。各折れ線の右端の右に対応するビット列を書けば、これは左のビット列を建てに列に並べたものになっていることがわかる。また、この対応は右側の樹形図から左側のビット列の上への 1 対

の対応となっている。

5回のコイン投げ の標本空間は $2^5 = 32$ の要素からなる。

上で述べた2進加法で1を加えていく方法で並べると次のようになる。

00000	00100	01000	01100	10000	10100	11000	11100
00001	00101	01001	01101	10001	10101	11001	11101
00010	00110	01010	01110	10010	10110	11010	11110
00011	00111	01011	01111	10011	10111	11011	11111

4回のコイン投げと5回のコイン投げとでは確率・統計の試験問題ち考
えるとかなり違ってくる。

2年生配当の確率・統計で4回のコイン投げの問題に対する解答では、上記4ビットの表を書き、個数を数えるものが相当数あった。これを5回のコイン投げに置き換えた後はビット列を数えあげる答案は減少はしたが無くなることはなかった。

3年生配当の確率論では、ボーナス問題として、10回のコイン投げの問題を出題していた。 $2^{10} = 1024$ であるから、さすがにビット列を書き始めるような無謀な答案は無かったが、白紙が時々あった気がする。

筆者としては10でも n でも同じと思うが、試験問題では差があることもあり得る。しかし10では、順列や組み合わせなどを用いて数学的に数えなければ、結論に到達するのは難しいと思う。

この数学的に数えるというのは離散数学の基本であるとともに、手間数を数えることは応用上重要である。プログラムにおいては、実行するのに必要な演算の回数が。挙げられる。

1.3 p 進表記

2進表記と10進表記は本章の重要な対象であった。

ここで、10 や 2 を文字 p に置き換えて、 $0, 1, \dots, p-1$ の列 $b_{n-1} \cdots b_1 b_0$ を考えることは一般化とよばれている。まずは、10 や 2 を p に置き換えて成り立つ性質か成り立たない性質辺りから調べていくことになるだろう。

1.3.1 p 進表記

$0, 1, \dots, p-1$ を n 個並べたものを $b_{n-1} \cdots b_1 b_0$ とする。これには $\sum_{i=0}^{n-1} b_i p^i$ が対応させることが p 進表記である。

$p = 2, 10$ 以外の使用例を探してみる。

$p = 16$

$p = 16$ でまず思い浮かぶのは、文字コードにおける16進数である。これは、16個ある4ビット列に $0, \dots, 9, A, \dots, F$ を割り当てたものである。しかし、各文字はビット列との対応のみで、16進表記された数として扱われた例は記憶にない。例えば、A は 1010 および 10 に、F は 1111 および 15 に対応するが、 $1010 + 1111 = 11001$ あるいは $A + F = 15$ に対応するようなことは記憶にない。

これは文字コードでは位取りが無いというか必要ないということ、あるいは計算ということが元々意味がないということであろう。このことから、

例を探すにあたって計算するおとがキー・ワードとなると思える。

計算するはすこし硬い感じがするので、やわらかく数えるあるいは‘はかる’を出発点とする。まずは、‘はかる’を読みとする漢字を挙げると、測る・量る・計る・図る・謀るなどが見つかった。

‘はかる’には単位が必要となる。現在ではメートル法が世界基準となっているが、古くは、欧米ではヤード・ポンド法、日本では尺貫法用いていた。

Wikipedia「ヤード・ポンド法」を見てみると、このうちの重さの一部に次を見つけた。

ドラム (dr) 1.7718451953125g

オンス (oz) 16dr 28.349523125g

ポンド (lb) 16oz 0.45359237kg

これは16進表記の名残りと思われる。

船の速度としてノットは今だに使われている。これは、1時間に1海里(1852m)進む速さである。

$p = 60$

1時間 = 60分、 1分 = 60秒

も同様である。

$p = 4$

1両 = 4分、 1分 = 4朱

もまた同様である。

他の p

$$p = 5$$

ローマ数字の記号では

$$I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000$$

が用意されている。

$$p = 12$$

12 があってもいいように思われるが、痕跡を見つけていない。英語とドイツ語で 12 までと 13 以降では名付け方が異なっている。

小数の p 進表記

p 進表記 $b_{n-1} \cdots b_1 b_0$ に $\sum_{i=0}^{n-1} b_i p^i$ が対応する。

ここで、 m 個の $b_{-1}, \dots, b_{-m}$ を加えて、 $b_{n-1} \cdots b_1 b_0 b_{-1} \cdots b_{-m}$ とし、これに実数 $\sum_{i=-m}^{n-1} b_i p^i$ を対応させるのが小数の p 進表記である。

このような実数は (p 進) 有理数と呼ばれている。

1.3.2 大きい桁小さい桁

大きい数を表す SI 接頭語

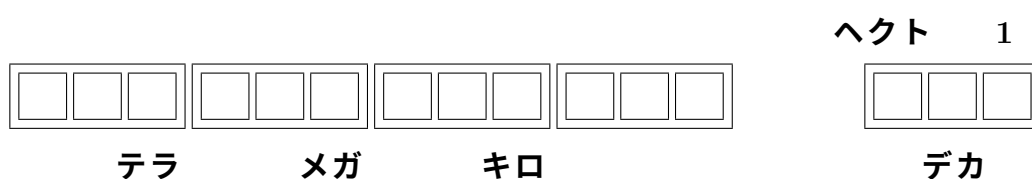
(デカ da・ヘクト h・) キロ K・メガ M・ギガ G・テラ T・ペタ P・エクサ E・ゼタ Z・ヨタ Y・ロナ R・クエタ Q

(国際単位系 (SI) はフランス語 Systeme international d 'unites に由来)

語学的な意味はわからないが、筆者のイメージでは上は数詞と理解している。最も、単位を付けなければ実用的には意味がない。

この系列は次のような2重構造になっている。大きい構造は1000進表記である。この桁(大枠で表す)には0から999の間の数が入る。これを10進3桁で表しここ各桁を小枠で表す。

テラの桁までを図示したものが次である。

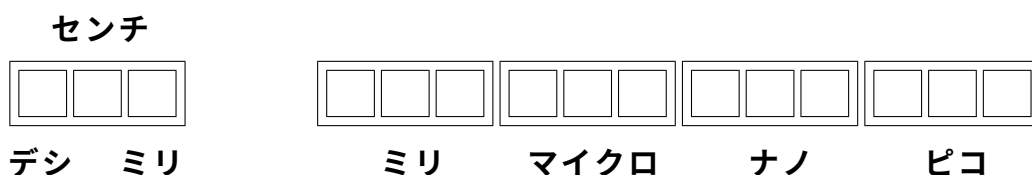


小さい数を表す SI 接頭語

小さい桁には次が挙げられている。

(デシ d・センチ c・) ミリ m・マイクロ μ ・ナノ n・ピコ p・フェムト f・アト a・zepto z・ヨクト y・ロント r・クエクト q

大きい桁と同様の図を描いてみた。



ここで、ベースの単位をメートルとすると、デシ・メートルは $\frac{1}{10}$ メートル、センチ・メートルは $\frac{1}{100}$ メートル、デカ・メートルは 10 メートル、ヘクト・メートルは 100 メートルである。一方、図では、デカ・ヘクトは大枠の単位に対するものであるが、デシ・センチは属している大枠の左の大枠の単位に対するものになっている。

漢字の数詞

漢字の数詞には次のものあることは Part II で見た。

壹・貳・参・四・伍・六・七・八・九、

拾・百・千

万・億・兆・京・垓・ジヨ・穰・溝・澗・正・載・極・恒河沙・

阿僧祇・那由他・不可思議・無量大数 (10⁴ 倍)

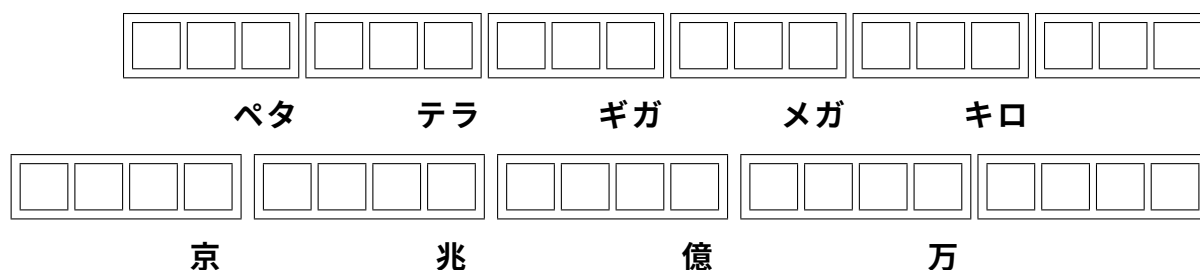
分・厘・毛・糸・忽・微・纖・沙・塵・埃・渺・漠・模糊・逡巡・

須臾・瞬息・彈指・刹那・六徳・虚・空・清・浄 (10⁻¹ 倍)

漢字の大きい桁

大きい数を表す SI 接頭語と同様に 2 重構造になっているが、全く同じではない。

大枠は万進表示で、大枠の内部は 4 桁の十進表示となっている。この図と国際単位系の図を次に掲げる。



英米の大きい桁

英米語では、thousand (10³、キロ)・million (10⁶、メガ) は共通であるがこの後は異なる。

イギリスでは 100 万ⁿ = 10⁶ⁿ で桁上がりしている。すなわち、大枠

は百万進表示で、各枠は10進6桁で表示される。

1: 10^6 million 2: 10^{12} billion 3: 10^{18} trillion 4: 10^{24} quadrillion
 5: 10^{30} quintillion 6: 10^{36} sextillion 7: 10^{42} septillion 8: 10^{48} octillion
 9: 10^{54} nonillion 10: 10^{60} decillion

米語ではこの後、 $1000 \times 1000^n = 10^{3+3n}$ で桁上がりしている。すなわち、大枠は千進表示で、各枠は10進3桁で表示される。

1: 10^6 million 2: 10^9 billion 3: 10^{12} trillion 4: 10^{15} quadrillion
 5: 10^{18} quintillion 6: 10^{21} sextillion 7: 10^{24} septillion 8: 10^{27} octillion
 9: 10^{30} nonillion 10: 10^{33} decillion

大きい桁

	10^3	10^4	10^6	10^8	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{16}
SI	キロ		メガ		ギガ	テラ	ペタ	
英国	thousand		million			billion		
米国	thousand		million		billion	trillion	quadrillion	
漢字	千	万		億		兆		京
	10^{18}	10^{20}	10^{21}		10^{24}	10^{27}	10^{28}	10^{30}
SI	エクサ		ゼタ		ヨタ	ロナ		クエタ
英国	trillion				quadrillion			quintillion
米国	quintillion		sextillion		septillion	octillion		nonillion
漢字		垓			ジョ		穰	

1.3.3 数詞と数を含む用語

数詞

数詞を挙げていく。

基数詞 (ラテン語の ひー・ふー・みー)

1: mono、2: di・bi、3: tri、4: tetra・quad、5: penta・quint、
6: hexa・six、7: hepta・sept、8: oct、9: nona、10: deca10;

倍数詞

single、double、triple、quadruple、quintuple・pentadrupte、
sextuple・hexatrupte、septuple、octuple、nonuple、decuple

集合数詞

solo、duet・duo、trio、quartet、quintet、sextet、septet、
octet、nonet

多角形

triangle、quadrangle、pentagon、hexagon、heptagon、octagon、
nonagon、decagon

数を含む用語

数を含む用語では、数が意味をもつ場合と意味が不明のものがある。

英語では bicycle、tricycle、quadracycle が簡単に見つかった。四輪は
four wheeler ともいうらしい。

十干十二支 は次である。

甲・乙・丙・丁・戊・己・庚・辛・壬・癸

子・丑・寅・卯・辰・巳・午・未・申・酉・戌・亥

戦前の日本の徴兵検査では、甲種合格乙種合格丙種合格丁種不合格戊種
(翌年再検査) という評価であったという。(秀) 優良可不可に対応する。

二十四節気 は次である。（暦生活 <https://www.543life.com> より）

〈春〉

1. 立春（りっしゅん） 2月4日～18日ごろ
2. 雨水（うすい） 2月19日～3月4日ごろ
3. 啓蟄（けいちつ） 3月5日～19日ごろ
4. 春分（しゅんぶん） 3月20日～4月3日ごろ
5. 清明（せいめい） 4月4日～18日ごろ
6. 穀雨（こくう） 4月19日～5月4日ごろ

〈夏〉

7. 立夏（りっか） 5月5日～19日ごろ
8. 小満（しょうまん） 5月20日～6月4日ごろ
9. 芒種（ぼうしゅ） 6月5日～20日ごろ
10. 夏至（げし） 6月21日～7月6日ごろ
11. 小暑（しょうしょ） 7月7日～22日ごろ
12. 大暑（たいしょ） 7月23日～8月7日ごろ

〈秋〉

13. 立秋（りっしゅう） 8月8日～22日ごろ
14. 処暑（しょしょ） 8月23日～9月7日ごろ
15. 白露（はくろ） 9月8日～22日ごろ
16. 秋分（しゅうぶん） 9月23日～10月7日ごろ
17. 寒露（かんろ） 10月8日～23日ごろ
18. 霜降（そうこう） 10月24日～11月7日ごろ

〈冬〉

19. 立冬（りっとう） 11月8日～21日ごろ
20. 小雪（しょうせつ） 11月22日～12月6日ごろ
21. 大雪（たいせつ） 12月7日～21日ごろ
22. 冬至（とうじ） 12月22日～1月5日ごろ
23. 小寒（しょうかん） 1月6日～19日ごろ
24. 大寒（だいかん） 1月20日～2月3日ごろ

七十二候は二十四節気をさらに約5日ずつの3つに分けた期間のことと

いう。

九星 Wiipedis 「九星」

九星	五行	方位	八卦	色
一白水星	水	北	坎	白
二黒土星	土	西南	坤	黒
三碧木星	木	東	震	青
四緑木星	木	東南	巽	緑
五黄土星	土	中央	太極	黄
六白金星	金	西北	乾	白
七赤金星	金	西	兌	赤
八白土星	土	東北	艮	白
九紫火星	火	南	離	紫

これらの他に、五節句・六曜・十二直・二十八宿がある。

月の和名の、睦月・如月・弥生・卯月・皐月・水無月・文月・葉月・長月・神無月・霜月・師走、曜日の日月火水木金土は数はないが順序が付けられている。

1.3.4 算木・算盤

(以下は出来れば)

五つ玉、上2つ下5つ

百玉そろばん

計算尺

問屋の小売、実験屋

1.3.5 二十八宿一覧

	宿名	音読	訓読	現代星座での概略位置	距星	吉凶
東方	角宿	かくしゆく	すぼし	おとめ座中央部	おとめ座 α 星	吉:着始め, 結婚, 柱立て, 普請造作。凶:葬式。
青龍	亢宿	こうしゆく	あみぼし	おとめ座東部	おとめ座 κ 星	吉:衣類仕立て, 種蒔き, 物品購入。凶:造作。
	?宿	ていしゆく	ともぼし	てんびん座	てんびん座 α 星	吉:開店, 結婚, 結納, 酒造り。凶:着始め。
	房宿	ぼうしゆく	そいぼし	さそり座頭部	さそり座 π 星	吉:移転, 開店, 髪切り, 祭祀, 結婚, 旅行。
	心宿	しんしゆく	なかごぼし	さそり座中央部	さそり座 σ 星	吉:移転, 祭祀, 新規事, 旅行。凶:結婚, 造作, 盗難注意。
	尾宿	びしゆく	あしたれぼし	さそり座尾部	さそり座 μ 星	吉:移転, 開店, 結婚, 新規事, 造作。凶:着始め, 衣類仕立て。
	箕宿	きしゆく	みぼし	いて座南部	いて座 γ 星	吉:池掘り, 改築, 仕入れ, 集金, 動土。凶:結婚, 葬式。
北方	斗宿	としゆく	ひきつぼし	いて座中央部 (南斗六星)	いて座 ϕ 星	吉:開店, 造作, 土掘り。
玄武	牛宿	ぎゅうしゆく	ひきつぼし	やぎ座	やぎ座 β 星	吉:移転, 金談, 旅行等全て。
	女宿	じょしゆく	うるきぼし	みずがめ座西端部	みずがめ座 ε 星	吉:お披露目, 稽古始め。凶:結婚, 葬式, 訴訟。
	虚宿	きょしゆく	とみてぼし	みずがめ座西部	みずがめ座 β 星	吉:学問始め, 着始め。凶:積極的行動, 相談, 造作。

宿名	音読	訓読	現代星座での概略位置	距星	吉凶
危宿	きしゆく	うみやめ ぼし	みずがめ座 一部 ペガサス座 頭部	みずがめ 座α星	吉:壁塗り, 酒作り, 船普 請。凶:衣類仕立て, 高所 作業。
室宿	しっしゆく	はつい ぼし	ペガサスの 四辺形の 西辺	ペガサス 座α星	吉:井戸掘り, 祈願始め, 結婚, 祭祀, 祝事。
壁宿	へきしゆく	なまめ ぼし	ペガサスの 四辺形の 東辺	ペガサス 座γ星	吉:衣類仕立て, 開店, 結 婚, 新規事開始, 旅行。
西方 奎宿	けいしゆく	とかき ぼし	アンドロ メダ座	アンドロ メダ座 ζ星	吉:着始め, 結婚, 柱立 て, 普請造作。凶:葬式。
白虎 婁宿	ろうしゆく	たたら ぼし	おひつじ座 西部	おひつじ 座β星	吉:衣類仕立て, 縁談, 契 約, 造園, 造作, 動土。
胃宿	いしゆく	えきえ ぼし	おひつじ座 東部	おひつじ 座35番星	吉:移転, 開店, 求職。
胃宿	いしゆく	えきえ ぼし	おひつじ座 東部	おうし座 17番星	吉:移転, 開店, 求職。
昂宿	ぼうしゆく	すばる ぼし	おうし座(プ レアデス)	おひつじ 座35番星	吉:開店, 祝事, 神仏詣。
畢宿	ひっしゆく	あめふり ぼし	おうし座 頭部 (ヒアデス)	おうし座 ε星	吉:運搬始め, 稽古始め。 凶:着始め, 造作。
觜宿	ししゆく	とろき ぼし	オリオン座 頭部 (ヒアデス)	オリオン 座λ星	吉:運搬始め, 稽古始め。 凶:着始め, 造作。
参宿	さんしゆく	からすき ぼし	オリオン座	オリオン 座ζ星	吉:縁談, 仕入れ, 祝事, 取 引開始、納入。

	宿名	音読	訓読	現代星座での概略位置	距星	吉凶
南方	井宿	せいしゅく	たまおの ぼし	かに座 中央部	かに座 θ 星	吉:神仏詣, 種蒔き, 動土, 普請。凶:衣類仕立て。
朱雀	柳宿	きしゅく	ちちり ぼし	ふたご座 南西部	ふたご座 μ 星	吉:大半。凶:婚礼。
	鬼宿	りゅうしゅく	ぬりこ ぼし	うみへび座 頭部	うみへび 座 δ 星	吉:物事の拒否。 凶:開店, 結婚, 葬式。
	星宿	せいしゅく	ほとおり ぼし	うみへび座 心臓部	うみへび 座 α 星	吉:乗馬始め, 便所改造。 凶:祝事, 種蒔き。
	張宿	ちょうしゅく	ちりこ ぼし	うみへび座 中央部	うみへび 座 υ 星	吉:就職, 祝事, 神仏祈願, 見合い。
	翼宿	よくしゅく	たすき ぼし	コップ座	コップ座 α 星	吉:植え替え, 耕作始め, 種蒔き。 凶:結婚, 高所 作業。
	軫宿	しんしゅく	みっかけ ぼし	からす座	からす座 γ 星	吉:祭祀, 祝事, 地鎮祭, 落 成式。 凶:衣類仕立て。