♠ ♣

講義ノートの周辺

Part I 高等学校数学I幾何

1. 幾何学の基礎

森 隆一

$\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\epsilon\,(\varepsilon)\,\zeta\,\eta\,\theta\,(\vartheta)\,\iota\,\kappa\,\lambda\,\mu\,\nu\,\xi\,o\,\pi\,(\varpi)\,\rho\,(\varrho)\,\sigma\,\varsigma\,\tau\,\upsilon\,\phi\,(\varphi)\,\chi\,\psi\,\omega$

$\Gamma\,\Delta\,\Theta\,\Lambda\,\Xi\,\Pi\,\Sigma\,\Upsilon\,\Phi\,\Psi\,\Omega$

$\mathcal{A}\,\mathcal{B}\,\mathcal{C}\,\mathcal{D}\,\mathcal{E}\,\mathcal{F}\,\mathcal{G}\,\mathcal{H}\,\mathcal{I}\,\mathcal{J}\,\mathcal{K}\,\mathcal{L}\,\mathcal{M}\,\mathcal{N}\,\mathcal{O}\,\mathcal{P}\,\mathcal{Q}\,\mathcal{R}\,\mathcal{S}\,\mathcal{T}\,\mathcal{U}\,\mathcal{V}\,\mathcal{W}\,\mathcal{X}\,\mathcal{Y}\,\mathcal{Z}$

$\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{E}\,\mathfrak{F}\,\mathfrak{G}\,\mathfrak{H}\,\mathfrak{I}\,\mathfrak{J}\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{L}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{O}\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{Q}\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{T}\,\mathfrak{U}\,\mathfrak{V}\,\mathfrak{W}\,\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}\,\mathfrak{Z}$

$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}\,\mathfrak{f}\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{l}\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}$

$\mathbb{A}\,\mathbb{B}\,\mathbb{C}\,\mathbb{D}\,\mathbb{E}\,\mathbb{F}\,\mathbb{G}\,\mathbb{H}\,\mathbb{I}\,\mathbb{J}\,\mathbb{K}\,\mathbb{L}\,\mathbb{M}\,\mathbb{N}\,\mathbb{O}\,\mathbb{P}\,\mathbb{Q}\,\mathbb{R}\,\mathbb{S}\,\mathbb{T}\,\mathbb{U}\,\mathbb{V}\,\mathbb{W}\,\mathbb{X}\,\mathbb{Y}\,\mathbb{Z}$

♡ ♢

目 次

まえがき (教科書の)

今日の文化的生活を支えている柱の一つは、ルネサンス以来急速な発達を見た自然科学である。数学はこの自然科学と表裏一体の関係にあり、数学の発達無くしては、自然科学の発達は望めなかった。最近では、社会科学の研究にも、数学は書くことのできないものとなりつつある。

以上の見地から考えて、ものごとを数学的に、あるいは論理的に考察処理する能力を育成しようとする数学科の使命は大きい。本書は高等学校数学 I の幾何編であって、その目標は次の三つに要約することが出来る。

i) 図形の性質を知り、これを応用すること。

ii) 演繹的推論によって体系づける方法とその価値を知ること。

iii) 三角関数と三角形との関係を知り、これを応用すること。

本書はこの目発を果たすために、数学教育の過去の動向、さらにその理想的あり方を研究し、それに現場の貴重な体験を生かすことによって編信したもので、特に留意した点は次の二つである。

1) **学びやすい体系の構成**　公理の数を増すことによって入門の段階をやさしくし、多角形の角の計算と、三角形の合同の条件の応用を出発点とした。また立体の求積では極限演繹的推論の考え方に触れず、公式の利用に重点を置き、学びやすいことを本旨とした。

2) **計算と作図の初期導入**　演繹的推論のみを続けると学習が単調になるので、代数的取り扱いと作図を初期より適宜に導入し、学習が興味を持って進められるようにくふうした。

第1章　幾何学の基礎

ユークリッド　Euclid (B. C. 300 ?)
彼の伝説は明らかでない。ギリシャ人で、前人の研究した多くの定理をまとめ、不完全な照明を補い、体系的な幾何を完成して、幾何原本を書いた。この本は不朽の名著とされ、幾何の教科書として現今に至るまで愛用された。世界じゅうでいちばん多く読まれた本は聖書で、その次がこの幾何原本であるとまでいわれている。

ユークリッドの写真

1.1　直線と角

1.1.1　直線と角

物体を形・大きさ・位置の方からのみ考えたものを図形という。図形には、燕や正方形のように全ての部分が一つの平面上にあるものと、立方体や円柱のように一つの平面上にないものとがある。初めの方を平面図形といい、あとの方を立体図形 (または単に立体) という。

図: 上記4つの図形のスケッチ

図形のうち基本的なものは点・直線および平面の三つである。私たちが

普通直線と呼んでいるものの中には、右の図のように、両方に限りなくのびているもの、一方にのみ限りなく延びているもの、および両端があるものの三種がある。これらの三つの場合をはっきり区別するために、第一の場合を直線、第二の場合を半直線、第三の場合を線分という。

図: 直線上に点 AB、A を視点とする半直線、線分 AB

このように用語の意味をはっきり決めることを定義という。定義は同じ用語が人によって違った意味に用いられるのを避けるために必要である。

二点があたえられたとき、それらを通る直線は一つしか引くことができない。これは直線の基本的な性質である。

図形の性質 (i) **二点を通る直線は一つあって、一つに限る。**

このことから、二直線の交点は一つしかないこと、および二直線が二つの点で出あえば、全く重ね合わさることがわかる。

線分 AB の長さは $\overline{\mathrm{AB}}$ と書き、二点 A, B 間の距離 という。

線分を二等分する点を、その線分の 中点 という。

図: 線分 AB とその中点 M

問 1.1.1.1 **線分 AB の中点を M、線分 AB 上の点を P、線分 AB の延長上点を Q とすれば**

$$\mathrm{MP} = \frac{\mathrm{AP} - \mathrm{BP}}{2}, \quad \mathrm{MQ} = \frac{\mathrm{AQ} + \mathrm{BQ}}{2}$$

一点 O より引いたふたつの半直線 OA. OB の作る図形を 角 といい、点

O を角の **頂点** といい、OA と OB を角の **辺** という。角 AOB を ∠ABC とも書く。

なお、半直線 OA. OB の作る角を OA. OB の **夾角** という。

図: OA. OB と角 O に円弧

∠ABC の大きさは、一方の辺、たとえば OA が他の辺 OB の位置まで回転した回転量である。∠ABC の大きさを ∠ABC と書き表す。

図: 線分 AB と中点 O と線分 OC、角 ∠AOC と角 ∠BOC に円弧

次に、角の大きさを表す単位について考えよう。角の二辺 OA. OB が一直線になるとき、この角の大きさは一定である。この一定な角の二等分線を OC とするとき、∠AOC と ∠BOC の大きさもまた一定である。この一定の角を **直角** という。

直角の大きさを角の単位にとり **1 直角** (1∠R) という。直角をさらに 90 等分した角の大きさを **1 度** (1°)、 1 度の角を六十等分した角の大きさを **1 分** (1′)、さらに 1 分の角を六十等分した角の大きさを **1 秒** (1″) といい、角を測る単位とする。

$$1\angle R = 90^\circ、1^\circ = 60'、1' = 60''$$

したがって、二辺が一直線をなす角の大きさは 2∠R すなわち 180° である。また、OA を O のまわりに一回転してもとの位置に重ねた角を考えれば、その大きさは 4∠R すなわち 360° である。

図: 線分 AB と中点 O、O を中心に 180° と 360° の回転

問 1.1.1.2 直線 AB 上の点 O から半直線 OC を引き、∠AOC と ∠AOC

の二等分線をそれぞれ、OC, ON **とすれば、**$\angle$MON **はいくらか。**

二直線 AB **と** CD **とが交わったときにできる四つの角について調べよう。**

$\angle$AOC **と** $\angle$BOD**、**$\angle$AOD **と** $\angle$BOC **とはそれぞれ** **対頂角** **という。**

図: 線分 AB と CD が O で交わる

問 1.1.1.3 **対頂角は等しいわけを明らかにせよ。**

問 1.1.1.4 **一直線** AB **上の点** O **から二つの半直線** OC, OD **を** AB **に関し、反対側に引き、**$\angle$AOC $=$ $\angle$BOD **となるようにすれば、**CO **と** DO **は一直線をなすことを明らかにせよ。**

問 1.1.1.5 **ある角の二等分線は、その対頂角を二等分することを明らかにせよ。**

二直線 AB **と** CD **が同じ平面上に合って交わらないときは** **平行である****といい。**AB//CD **と著す。平行な二直線を** **平行線** **という。**

直線 AB **外に点** P **があるとする。**P **を通る直線** CD **を引き、それを** P **のまわりに時計の回転と、**AB **と** CD **との交点** Q **は** B **の方に移動し、限りなく遠ざかる。そして 直線** AB **に平行になった瞬間交点はなくなり、それを過ぎると交点** Q **は再び** A **の方の遠方に現れ、しだいにもとの位置に近づく。**

図: 上の状況、5 頁

この観察から P を通って AB に平行な直線は一つしか引けないと考えられる。これを平行線の基本的な性質として認めよう。

図形の性質 (ii) 直線外の一点を通って、この直線に平行な直線は一つあって、一つに限る。

平行線に他の一直線が交わったときにできる八個の関係を調べてみよう。

一般に右の図で α と α'、δ と δ' のような位置関係にある二つのを **同位角** といい、γ と α'、δ と β' のような位置関係にある二つのを **錯角** といい、α' と δ、β' と γ のような位置関係にある二つのを **同傍内角** という。

図: 上の状況、5 頁

私たちは右の図のように三角定規をすべらして平行線を書くが、これは平行線に関する次の重要な性質に基づいている。

図: 上の状況、5 頁

図形の性質 (iii) 平行線に一直線が交わったときにできる各組の同位角はそれぞれに等しい。また、二直線に他の直線が交わったときにできる一組の同位角が等しいならば、この二直線は平行である。

問 1.1.1.6 平行な二直線に他の一直線が交わったときにできる錯角の間にはどんな関係があるか。

図: 上の状況で 1 組の錯角に円弧

問 1.1.1.7 二直線に他の一直線が交わったときにできる一組の錯角が等しいならば、この二直線は平行であることを明らかにせよ。

問 1.1.1.8　**平行な二直線に他の一直線が交わったときにできる同傍内角の間には、どんな関係があるか。**

二つの角の和が二直角に等しいとき、これらの二角は 補角をなす とまたは、一方を他方の補角という。

問 1.1.1.9　**二直線に一直線が交わったときにできる一組の同傍内角が補角をなせば、この二直線は平行であることを明らかにせよ。**

問 1.1.1.10　**次の図で二直線** a **と** b **とは平行である。角の大きさ** α, β, γ, δ **を求めよ。**

図: 3 つの問題図

直線 AB **と** CH **との広角が直角ならば、この二直線は 直行する または 垂直である といい、**AB⊥CH **と表す。またある直線に垂直な直線を初めの直線の 垂線 という。**

図: 直線 AB 上に H と K、垂線 HC、普通に KC

直線 AB **外の点** C **から直線** AB **に垂線** CH **を作るとき、交点** H **をこの垂線** CH **の 足 という。**

図形の性質 (iii) **の特別な場合として、平行な二直線の一方に垂直な直線は他方にも垂直である。この直線を平行線の 共通垂線 という。**

1.1.2　多角形の角

右の図のように、幾つかの線分が閉じた図形を作るとき、これらを 多角形 といい、これらの線分を 辺、となりあう辺の交点を 頂点 という。多角形は辺の数によって、三角形、四角形という。

図: 一般五角形 ABCDE

頂点が A, B. C, D, $\cdots$ **の多角形を多角形** ABCD$\cdots$ **と書き、特に三角形** ABC **は** $\triangle$ABC **と書く。**

森記　正四角形は殆ど用いられず、正方形が用いられている。

多角形のとなりあう辺の作る角のうち、多角形の内側のもの α, β, γ **などを 内角 または 頂角 といい、辺とその隣の辺の延長との作る角** α', β', γ' **などを 外角 という。**

図:5 角形で頂角と外角

注意　多角形には、内角がすべて二直角より小さいものと、そうでないものがある。ぜんしゃを凸多角形といい、後者を凹多角形という。単に多角形という場合には普通凸多角形の意味に用いる。

図:凸 5 角形と凹 5 角形

いろいろの三角形を紙に書いて、三つの角をはさみで切り離し、右の図のように並べてみると、三角形の内角の和は $2\angle$R **であることが予想される。**

図:上の図

このようにいくつかの実例についての観察や実験から、一般に成り立つ

法則を見い出す方法を **帰納法** という。帰納法は図形の性質を見い出すときにたびたび用いられる。

三角形の内角の和が $2\angle\mathrm{R}$ であることは、今までに知った図形の性質をもとのして確かめることができる。

三角形を ABC とし、辺 BC を C の方に延長し、その上に点 D をとる。また、C から BA に平行な直線 CE を角 ACD 内に引いて、図のように角の大きさを表せば、

$\boxed{\text{森記}}$ $\angle$BAC$=\alpha$、$\angle$ABC$=\beta$、$\angle$ACB$=\gamma$、$\angle$ACE$=\alpha'$、$\angle$DCE$=\beta'$

$\alpha=\alpha'$、$\beta=\beta'$　ゆえに　$\alpha+\beta+\gamma=\alpha'+\beta'+\gamma=2\angle\mathrm{R}$

図:△ABC、BC の延長上に D、平行に CE、∠A を α ∠B を β ∠C を γ

このように、ある事がらが正しいかどうかを、すでに知られている法則をもとにして確かめることを **演繹的証明** または単に **証明** という。

参考　演繹的証明は次のような三段論法のくり返しになっている。

(1)　平行線の錯角は等しい。　　(M は P である。)

(2)　α と α' は錯角である。　　(S は M である。)

(3)　ゆえに α と α' は等しい。　(S は P である。)

(1) を **大前提**、(2) を **小前提**、(3) を **結論**といい、(1) と (2) をまとめて **前提** という。

アリストテレス

Aristoteles (B. C. 384 ∼ B. C. 322)

プラトンのでし、世界最大の哲学者のひとり、
万学の祖といわれている。正しい論法の形式を
発見し論理学を確立した。

アリストテレスの写真

上で知ったように、「三角形の内角の和は 180° である。」ことを証明するには「平行線の同位角および錯角はそれぞれ等しい。」ということを使った。このようにある法則 S_1 の正しいことを証明するには、その根拠として他の正しい法則 S_2 が必要である。ところがその法則 S_2 の正しいことを証明しようとすると、その根拠となる他の正しい法則 S_3 が必要になる。これをくり返していけば、ついにはどうにも証明のない簡単な基本的法則に到達する。

数学では、いちばん初めにいくつかの法則は証明をしないで正しいと認め、これを証明の根拠に用いる。この基本的な法則を **公理** と呼び、公理をもとにして正しいことが証明された法則を **定理** と呼ぶ。

幾何を研究するのにどんな法則を公理として認め、これらの公理から証明によって定理を導き、幾何を一つの学問体系に組み立てるかということはたいへんむずかしいことで、古くから多くの人々により研究された。

私たちは、すでに知った三つの図形の性質を正しいものと認め、これを基にして他の平面図形の性質を確かめることにする。

(i)　**二点を通る直線は一つあって、一つに限る。**

(ii)　**直線外の一点を通って、これに平行な直線は一つあって、一つに限る。**

(iii)　**平行線に一直線が交わったときにできる各組の同位角は等しい。また、二直線に他の一直線に交わったときにできる一組の同位角が等しいならば、この二直線は平行である。**

まず、これらの図形の性質から導いた定理をまとめておこう。

定理 1　**対頂角は等しい。**

定理 2　**平行線に一直線が交わったときにできる錯角は等しい。また、二直線に他の一直線が交わったときにできる一組の錯角が等しいならば、この二直線は平行である。**

定理 3　**三角形の内角の和は二直角である。**

この定理の証明の図から

$$\angle \mathrm{ACD} = \angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{B}$$

したがって

$$\angle \mathrm{ACD} > \angle \mathrm{A}、\angle \mathrm{ACD} > \angle \mathrm{B}$$

という関係が導かれる。

図: △ABC、C の延長上に D、∠A∠B に円弧と内対角、∠ACB に円弧と外角

このようにある定理から簡単に導くことのできる定理を、もとの定理の系という。

系 3.1　三角形の外角は、その内対角の和に等しい。

問 1.1.2.1　二つの三角形 ABC と A′B′C′ とで、$\angle \mathrm{A} = \angle \mathrm{A}'$、$\angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{B}'$ ならば、$\angle \mathrm{C} = \angle \mathrm{C}'$ である。

問 1.1.2.2　三角形 ABC の内部の点を O とすれば、$\angle \mathrm{BOC} > \angle \mathrm{BAC}$ である。

角のうち $1\angle \mathrm{R}$ より小さいものを **鋭角** といい、$1\angle \mathrm{R}$ 大きいが、$2\angle \mathrm{R}$ より小さいものを **鈍角** という。

図: 鋭角と鈍角

三角形をその内角の大きさによって分類しよう。すべての内角が鋭角のものは **鋭角三角形** といい、一つの内角が直角のものを **直角三角形**、一つの内角が鈍角のものを **鈍角直角三角形** という。

図: 三種の三角形

なお、直角三角形では、直角に対する辺を **斜辺** という。

三角形の内角の和が $2\angle \mathrm{R}$ であることを用いれば、任意の多角形の内角の和は容易に求められる。

定理 4　n 角形の内角の和は $(2n-4)\angle R$ に等しい。

(証明)

図: 6 角形 ABCDEF、内点 O、頂点と O を結ぶ線分

n 角形 ABCD$\cdots$ の内部の任意の点を O とし、O と各頂点を結べば、この多角形は n 個の三角形に分けられる。これらの三角形のすべての内角の和は、

$$2\angle\mathrm{R}\times n = 2n\angle\mathrm{R}$$

これから点 O まわりの角 $4\angle\mathrm{R}$ を引いたものが、この n 角形の内角の和である。

ゆえに、 $$2n\angle\mathrm{R}-4\angle\mathrm{R} = (2n-4)\angle\mathrm{R}$$ □

系 4.1 n 角形 各頂点において、一つずつ作った外角の和は $4\angle\mathrm{R}$ に等しい。

(証明) 内角の和を $x\angle\mathrm{R}$、外角の和を $y\angle\mathrm{R}$ とすれば

$$x = 2n4、x+y = 2n$$

よって $y = 2n - x = 2n - (2n-4)4$

すなわち、外角の和は $4\angle\mathrm{R}$ □

問 1.1.2.3 八角形および十角形の内角の和はいくらか。

多角形のうちで、辺の長さがみな等しいものを **等辺多角形** といい、内角の大きさががみな等しいものを **等角多角形** という。そして等辺で等角の多角形を **正多角形** という。

図: 正六角形、等辺六角形、等角六角形

例 1.1 内角の大きさが 108° の正多角形の辺数を求めよ。

(証明) 求める辺数を n とする。n 角形の内角の総和は $(2n-4)\angle\mathrm{R}$ であるから、正 n 角形の角の大きさは、

$$2n - 4n\angle\mathrm{R} = 2(n-2)n \times 90^\circ$$

である。よって、

$$2(n-2)n \times 90^\circ = 180^\circ$$

これを解いて $\quad n = 5 \quad$ **(答) 5** $\square$

問 1.1.2.4 正八角形の内角および外角の大きさはいくらか。

問 1.1.2.5 次の各条件に合う正多角形の辺数を求めよ。

1) **内角が外角の2倍** 2) **内角が** 180° 3) **外角が** 30°

練習問題 [1]

練習問題 1.1 多角形の頂点を結ぶ線分のうちで、その多角形の辺でないものを 対角線 という。n 角形にはいくつの対角線があるか。

練習問題 1.2 次の図で角の大きさ x、y を求めよ。

(1) **他の内角が** 45°、72° (2) **内対角が** 28°、36° **の角の外角**

(3) **頂角が** 80° **の二当年三角形の他の角**

(4) **外角が** 140° **の2角の共通内対角**

(5)、(6) は少し複雑なのでスキップ

練習問題 1.3 四角形 ABCD のとなり合う二角 A、B の二等分線の交点を O とすれば、

$$\angle \mathrm{AOB} = \frac{\angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{B}}{2}$$

練習問題 1.4　四角形ABCD の二角 A、C の二等分線の交点を O、AO の延長上の点を F とすれば、

$$\angle\mathbf{EOC} = \frac{\angle\mathbf{B} - \angle\mathbf{D}}{\mathbf{2}}$$

練習問題 1.5　右の凹多角形の内角の和はいくらか。

図: 1辺の長さが等しい2つの凸四辺形をつなげた凹八角形

1.2　三角形の合同

1.2.1　三角形の合同

二つの図形があって、一方を移動して他方に全く重ね合わせることができるとき、この二つの図形は 合同 であるという。私たちが普通、形と大きさの同じ図形というのは、この合同な図形のことである。

合同奴多角形では、重ね合わせたときに重なり合う頂点を対応する頂点といい、重なり合う辺を対応する辺という。

二つの図形、たとえば五角形 ABCDE と A′B′C′D′E′ とが合同であることは、

$$\text{五角形 ABCDE} \equiv \text{五角形 A′B′C′D′E′}$$

と書き表す。この表し方の中には、頂点の対応まで含めるのがよい。

図: 合同な五角形 ABCDE と 五角形 A′B′C′D′E′

問 1.2.1.1　**辺の長さが等しい二つの正 n 角形は合同である。これを正五角形の場合について証明せよ。**

定理 5　**一つの三角形の二角とその夾辺とが、他の三角形の二角とその夾辺とにそれぞれ等しいならば、この二つの三角形は合同である。**

(二角夾辺の合同)

(証明)　$\triangle$ABC **と** $\triangle$A′B′C′ **において、**

$$\angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{B}'、\angle \mathrm{C} = \angle \mathrm{C}'、\mathrm{BC} = \mathrm{B}'\mathrm{C}'$$

とする。$\triangle$A′B′C′ **を動かして辺** B′C′ **を辺** BC **上に、**$\angle$B′ **を** $\angle$B **上に、**

$\angle$C′ を $\angle$C 上に重ねれば、△A′B′C′ は △ABC に全く重なる。したがって、

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$ 図:上の状況 □

問 1.2.1.2 三角形の二角とその一角に対する辺が、他の三角形の二角とその一角に対する辺とそれぞれに等しいならば、二つの三角形は合同である。 (二角一対辺の合同)

図:上の状況

定理 6 一つの三角形の二辺とその夾角とが、他の三角形の二辺とその夾角とにそれぞれ等しいならば、この二つの三角形は合同である。

(二辺夾角の合同)

(証明) 各自試みよ。

二辺の等しい三角形を **二等辺三角形** という。二等辺三角形では特に、等しい辺のなす角を **頂角**、残りの二角を **底角**、頂角に対する辺を **底辺**、等しい辺の交点を **頂点** という。

図:上の状況

定理 7 二等辺三角形の二つの低角は等しい。

(証明) △ABC で、AB=AC ならば、$\angle B = \angle C$ となることを証明する。

$\angle$A の二等分線が BC と交わる点を D とすれば、△ABD と △ACD とにおいて、

$$\mathrm{AB{=}AC}$$

$$\mathrm{AD}\ \textbf{は共通、}\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{CAD}$$

ゆえに $$\triangle\mathrm{ABD} \equiv \triangle\mathrm{ACD}$$

よって $$\angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{C}$$

図:上の状況 $\square$

問 1.2.1.3　三つの辺の等しい三角形は三つの角もまた等しい。

> $\boxed{\text{森記}}$ 正多角形は全ての辺の長さが等しく、また、全ての角の大きさが等しいものと定義した。この問と次の問いにより、三角形の場合はどちらかが成り立てばよいことになる。
> 四角形では、全ての辺の長さが等しいものはひし形、全ての角の大きさが等しいものは長方形とよばれている。

定理 8　一つの三角形の三辺が、他の三角形の三辺にそれぞれ等しいならば、この二つの三角形は合同である。　　(三辺の合同)

(証明)　$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ において

$$\mathrm{AB{=}A'B'}$$

$$\mathrm{BC{=}B'C'}$$

$$\mathrm{CA{=}C'A'}$$

ならば $$\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{A'B'C'}$$

となることを証明すればよい。

$\triangle\mathrm{A'B'C'}$ を移動して、辺 $\mathrm{B'C'}$ を辺 BC に重ね、A と $\mathrm{A'}$ が BC の反対側にあるようにする。$\mathrm{A'}$ の新しい位置を D とし、A と D とを結ぶ。

$\triangle$BAD において AB=DB であるから

$$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{BDA}$$

$\triangle$CAD において AC=DC であるから

$$\angle\mathrm{CAD} = \angle\mathrm{CDA}$$

したがって
$$\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{BDC}$$

ゆえに二辺夾角の合同によって

$$\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{DBC}$$

よって
$$\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{A'B'C'}$$

図:上の状況

特に直角三角形にの合同については次の定理がある。

定理 9 二つの直角三角形は、斜辺と他の一辺とがそれぞれ等しいときは合同である。

(証明) $\triangle$ABC と $\triangle$A′B′C′ において

$$\begin{aligned} \angle\mathrm{B} &= \angle\mathrm{B'} \qquad (1) \\ \mathrm{AC} &= \mathrm{AB'C'} \\ \mathrm{AB} &= \mathrm{AC'B'} \end{aligned}$$

であるとする。

$\triangle$A′B′C′ の位置を変えて、辺 A′B′ を辺 AB に重ね、C と CA′ とは AB の反対側になるように置いてみる。C′ の新しい位置を D とすれば、BD と BC は一直線になり、AC=AD であるから、$\triangle$ADC は二等辺三角形である。したがって定理 7 によって

$$\angle\mathrm{D} = \angle\mathrm{C} \qquad \text{ゆえに} \qquad \angle\mathrm{C}' = \angle\mathrm{C} \tag{2}$$

(1) と (2) から $\quad \angle\mathrm{A}' = \angle\mathrm{A}$

二辺夾角によって

$$\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{A'B'C'}$$

図:上の状況 $\square$

問 1.2.1.4　二つの直角三角形は次のおのおのの場合に合同である。

1) 斜辺と一つの鋭角とがそれぞれ等しいとき。

2) 直角の一辺と一つの鋭角とがそれぞれ等しいとき。

3) 直角の二辺がそれぞれ等しいとき。

1.2.2　二等辺三角形

三角形の合同の定理を使って二等辺三角形の性質を調べてみよう。

定理 10　**三角形の二つの角が等しいならば、それに対応する辺は等しい。**

(証明)　$\triangle$ABC **において** $\angle B = \angle C$ **ならば** AB=AC **となることを証明する。**

$\angle$A **の二等分線が辺** BC **と交わる点を** D **とすれば、**$\triangle$ABD **と** $\triangle$ACD **とにおいて**

AD **は共通**

また　$$\angle B = \angle C$$

$$\angle BAD = \angle CAD$$

よって　$$\triangle ADB = \triangle ADC$$

二辺夾角の合同により

$$\triangle ADB \equiv \triangle ADC$$

ゆえに　AB=AC

図:上の状況

□

問 1.2.2.1　**三角形の三つの角が等しいならば三つの辺もまた等しい。**

幾何の公理や定理のように、ある判断や結論を文章で表したものを 命題 という。さて定理 10 は次のように書くことができる。

$\angle B = \angle C$　　**ならば**　　AB=AC　　**である。**

この命題で「∠B= ∠C」の部分を 仮定 (または条件) といい「AB=AC」の部分を 結論 (または終結) という。一般に

A であるならば B である。

という命題で「A である」を仮定、「B である」を結論という。

定理 7 と定理 10 は仮定と結論をいれかえたものになっている。このようなとき、一方を他方の 逆 という。すなわち

A であるならば B である。 (1)

という命題の逆は

B であるならば A である。 (2)

命題の関係としては、この他に次の二つがある。

条件と結論とを共に打ち消したもの、すなわち

A でないならば B でない。

を初めの命題 (1) の 裏 という。さらにこの裏の逆、

B でないならば A でない。

を初めの命題 (1) の 対偶 という。

ある命題が真であっても、その逆の命題は必ずしも真ではない。しかし、ある命題とその対偶とはともに真であるか、またはともに真ではない。

森記 命題が真とは

図:上の関係図 p.18

たとえば、△ABC において

AB=BC=CA　　ならば　　∠B = ∠A　　である。

は真であるが、この逆の命題

$\angle B = \angle A$ **ならば** AB=BC=CA **である。**

は必ずしも真でない。また

AB=AC **ならば** $\angle B = \angle C$ **である。**

は真であるから、この対偶の

$\angle B \neq \angle C$ **ならば** $AB \neq AC$ **である。**

もまた真である。

森記 '逆の命題' は単に '逆' というべき。

問 1.2.2.2 **次の命題の逆・裏・対偶を作り、それらは正しいかどうかを調べよ。**

1) **二直線が平行ならば同位角は等しい。**

2) **三角形の鈍角は最大角である。**

森記 前では、命題が真と言っていた。すこしかたくいうと、真偽を判定せよとなる。

問 1.2.2.3 **次の事がら** 1)、2) **は正しいか。**

点 O **が** $\triangle ABC$ **の内部にあるときは** $\angle BOC > \angle BAC$ **であるから**

1) $\angle BOC > \angle BAC$ **ならば、点** O **は** $\triangle ABC$ **の内部にはない。**

2) **点** O **が** $\triangle ABC$ **の外側にあれば、**$\angle BOC > \angle BAC$ **である。**

三角形の頂点と、それに対応する辺の中点とを結ぶ線分を 中線 という。二等辺三角形の中線には次の性質がある。

図:上の説明図

例 1.2　二等辺三角形の頂点から引いた中線は、天辺に垂直である。

(仮定)　△ABC で AB=AC、BD=CD
(結論)　AD⊥BC
(証明)　△ABD と △ACD とを比べると
仮定によって
AB=AC、BD=CD
また　AD は共通
三辺の合同によって
$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$
ゆえに　$\angle ADB = \angle ADC$
よって　AD⊥BC

図:左の説明図

数学の命題を確かめるためには、どんな仮定からどんな結論を導くかをはっきりさせなければならない。したがって、仮定・結論・証明の三つに分けて調べるがよい。

線分の中点を通り、これに垂直な直線を、その線分の **垂直二等分線** という。上の図で AD は線分 BC の垂直二等分線である。

森記　ここまでも何カ所かあったが、線分と直線の使い方が若干曖昧である。あまり堅苦しくしない方針かもしれない。
二点 A、D を通る直線という意味で、直線 AD と解釈する。

問 1.2.2.4　二等辺三角形の頂点の二等分線は、底辺の垂直二等分線である。

問 1.2.2.5　二等辺三角形の頂点から底辺に引いた垂線は、頂角および底辺を二等分する。

問 1.2.2.6　二点から等距離にある点は、その二点を結ぶ線分の垂直二等分線上にある。この逆もまた正しい。

問 1.2.2.7　二等辺三角形の低角の二等分線の長さは等しい。

問 1.2.2.8　二等辺三角形の底辺の両端から等辺に引いた中線の長さは等しい。

1.2.3 三角形の辺と角の大小関係

三角形の二辺が等しいときは、それに対する角は等しく、この逆もまた正しい。したがって、二辺が等しくないときは、それに対応する角も等しくないことがわかる。それでは、辺の大小とそれに対応する角の大小との間にはどんな関係があるだろうか。これについては次の定理がある。

森記 辺については長短というべきであろう。

定理 11 一つの三角形で、大きい辺に対する角は、小さい辺に対する角よりの大きい。

(証明) $\triangle$ABC で AB>AC とする。辺 AB 上に AC に等しく AD を取り、D と C とを結べば $\angle C > \angle ACD$

また AC=AD から $\angle ACD = \angle ADC$

また $\angle ADC$ は $\triangle BCD$ の外角で、$\angle B$ はその外角であるから、

$$\angle ADC > \angle B$$

ゆえに $$\angle C > \angle B$$

図:上の説明図

$\square$

定理 11 の逆も正しい。すなわち、

系 11.1 一つの三角形で、大きい角に対する辺は小さい三角に対する辺より大きい・

(証明) $\triangle$ABC で $\angle C > \angle B$ ならば AB>AC となることを証明する。

もし $AB>AC$ でないとすれば、 $AB=AC$ または $AB<AC$ のいずれかである。

$\boxed{\text{森記}}$ ニ択の場合は‘どちらか’だろう。

$AB=AC$ とすれば、定理 7 によって $\angle C = \angle B$ となる。これは、仮定 $\angle C > \angle B$ に反する。

次に $AB<AC$ とすれば、定理 11 によって、$\angle C < \angle B$ となる。これも $\angle C > \angle B$ に反する。

ゆえに $AB>AC$ でなければならない。 □

この証明のように、結論を否定すれば不合理の起きることを示して、結論が成り立たなければならないことを明らかにする証明を**背理法**(または**帰謬法**)という。

問 1.2.3.1　直角三角形および鋭角三角形の最大辺はどれか。

問 1.2.3.2　直線外の一点と、その直線上の点とを結ぶ線分のうちで、垂線が最も短い。すなわち右の図で $PH>PQ$。

問 1.2.3.3　右の図で $HQ>HR$ ならば $PQ>PR$。

図:上の説明図

ある点から一つの直線に引いた垂線の長さを、その**点と直線との距離**という。

$\boxed{\text{森記}}$ 上の図で線分 PH の長さを、点 P と直線 AB との距離という。

三角形の二辺の和と残りの辺との大小については、よく知られている次

の定理がある。

定理 12　三角形の二辺の和は、残りの辺より大きい。

(証明)　**$\triangle$ABC において AB+AC>BC となることを証明する。**

BA の延長上に、AC に等しく AD をとり、C と D とを結べば

$$\angle\mathrm{BDC} = \angle\mathrm{ACD} < \angle\mathrm{BCD}$$

ゆえに $\triangle$BCD に定理11の系を用いれば

$$\mathrm{BD}>\mathrm{BC}$$

よって

$$\mathrm{AB}+\mathrm{AC}=\mathrm{AB}+\mathrm{AD}=\mathrm{BD}>\mathrm{BC}$$

ゆえに

$$\mathrm{AB}+\mathrm{AC}>\mathrm{BC}$$

図:上の説明図

問 1.2.3.4　三角形の二辺の差は、残りの辺より小さい。

例 1.3　$\triangle$ABC の内部の一点を P とすれば、次の不等式が成り立つ。

$$\mathrm{PB}+\mathrm{PC}<\mathrm{AB}+\mathrm{AC}$$

(解)　**BP の延長が辺 AC と交わる点を Q とすれば、$\triangle$CPQ から**

$$\mathrm{PC}<\mathrm{PQ}+\mathrm{QC}$$

両辺に PB を加えて

$$\mathrm{PB}+\mathrm{PC}<\mathrm{PB}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QC}=\mathrm{BQ}+\mathrm{QC} \tag{1}$$

森記　元には南中の項がないが、PB を加えた式はそのまま書くべきでと考える。

$\triangle$ABQ より

$$\mathrm{BQ}<\mathrm{AB}+\mathrm{AQ}$$

両辺に PB を加えて

$$\mathrm{BQ+QC<AB+AC} \tag{2}$$

(1) と (2) から

$$\mathrm{PB+PC<AB+AC}$$

図:上の説明図

問 1.2.3.5　線分 AB の垂直二等分線 g に関して、A と同じ側にある一点を P とすれば

$$\mathrm{AP<BP}$$

である。この逆もまた正しい。

△ABC で、AB、AC の長さを一定にしておいて、∠A を変化させれば、それに伴って BC もまた変化する。図を観察した結果では ∠A が大きくなれば、BC もまた大きくなる。この観察の正しいことは、次の定理によって確かめられる。

図:上の説明図

定理 13　△ABC と △A′B′C′ とにおいて

$$\mathrm{AB=A'B'、AC=A'C'、}\angle\mathrm{A} < \angle\mathrm{A'}$$

ならば　BC<B′C′ である。

(証明)　△A′B′C′ を移動して、辺 A′B′ を AB に重ね、C と C′ とが AB に関して同じ側にあるようにしたとき、C′ の新しい位置を D とする。∠CAD の二等分線が BD と交わる点を E とし、C と E とを結べば

$$\triangle \mathrm{ACE} \equiv \triangle \mathrm{ADE} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{EC{=}ED}$$

$$\mathrm{BD{=}BE{+}ED{=}BE{+}EC{>}BC}$$

よって $\mathrm{B'C'} > \mathrm{BC}$ □ 図:上の説明図

系 13.1 $\triangle \mathrm{ABC}$ **と** $\triangle \mathrm{A'B'C'}$ **とにおいて**

$$\mathrm{AB{=}A'B'}、\mathrm{AC{=}A'C'}、\mathrm{BC{<}B'C'}$$

ならば $\angle \mathrm{A} < \angle \mathrm{A'}$ **である。**

問 1.2.3.6 定理13の系を、定理13から背理法により導け。

問 1.2.3.7 $\triangle \mathrm{ABC}$ **の辺 BC の C の方の延長上に AB に等しく CD をとれば BC と AD はどちらが大きいか。**

練習問題 [2]

練習問題 2.1 二等辺三角形の頂点における外角の二等分線は、底辺に平行である。

練習問題 2.2 AB=AC である二等辺三角形 $\triangle \mathrm{ABC}$ **において、B、C から対辺に引いた垂線を BH、CK とすれば BH=CK である。**

練習問題 2.3 前問で BH=CK ならば AB=AC となるか。

森記 単に '前問で' とすれば、前問の設定、'AB=AC である二等辺三角形 △ABC' は踏襲せべきではないか。

練習問題 2.4 角の二等分線上の点から角の二辺に至る距離は等しい。この逆もまた正しい。 図:上の説明図

練習問題 2.5 **三角形** $\triangle$ABC **において、**AB>AC **であるとき、辺** AB **上に** AC **に等しく** AD **をとれば、次の等式が成り立つ。**

$$\angle \mathrm{ACD} = \tfrac{1}{2}(\angle \mathrm{B}+\angle \mathrm{C})$$

$$\angle \mathrm{BCD} = \tfrac{1}{2}(\angle \mathrm{C}-\angle \mathrm{B})$$

図:上の説明図

練習問題 2.6 AB=AC **である二等辺三角形** $\triangle$ABC **において、**B **から** AC **に引いた垂線の足を** D **とすれば**

$$\angle \mathrm{DBC} = \tfrac{1}{2}\angle \mathrm{A}$$

である。

練習問題 2.7 **四角形の二つの対角線の和は、周の半分より大きく、周の全体よりは小さい。**

練習問題 2.8 **三角形** $\triangle$ABC **の内部の一点を** O**、この三角形の周の長さを** ℓ **とすれば**

$$\ell > \mathrm{AO}+\mathrm{BO}+\mathrm{CO} > \tfrac{1}{2}\ell$$

練習問題 2.9 AB=AC **である三角形** $\triangle$ABC **で辺** AB **を** B **の方に延長した上にある点** D**、辺** AC **上に点** E **をとり、**BD=CE **となるようにすれば** DE>BC **である。**

図:上の説明図

1.3 作図と移動

1.3.1 基本作図

与えられた条件に適する図形を作ることを **作図** といい、要求する問題を **作図題** という。

図を書く器具にはいろいろあるが、幾何では定規とコンパスだけを用いる。すなわち次の二つの作図は常にできるものと考える。

(1) 与えられた二点を通る直線を引くこと。

(2) 与えられた点を中心とすし、与えられた半径の円を書くこと。

これを **作図の公法** という。

作図題 1 与えられた線分の中点を作ること。

(作図) 与えられた線分を AB とする。A、B を中心として半径の等しい交わる二円を書いて、その交点を C、D とする。

C と D を結び、AB との交点を M とすれば、この点が求める中点である。

(証明) A、B を C、D と結べば、 $\triangle$ACD と $\triangle$BCD において

$$\mathrm{AC}=\mathrm{BC}、\mathrm{AD}=\mathrm{BD}、\mathrm{CD}\ \text{は共}$$

ゆえに
$$\triangle\mathrm{ACD} \equiv \triangle\mathrm{BCD}$$

よって
$$\angle\mathrm{ACD} = \angle\mathrm{BCD}$$

ゆえに CS は**二等辺三角形 CAB の頂角 C の二等分線**であるから AB との交点 M は AB の中点である。 図:上の説明図

森記 円については、‘書く’ よりも ‘描く’ を使いたい。

問 1.3.1.1　与えられた線分を四等分せよ。

作図題 2　与えられた角を二等分すること。

(作図)　与えられた角を ∠AOB とする。O を中心に任意の半径の円を書き、OA、OB と交わる点をそれぞれ C、D とする。C、D を中心として半径の等しい交わる二円を書き、その交点の一つを E とする。O から E を通る半直線を引けば、これが求めるものである。　図:上の説明図

(証明)　C、D と E とを結ばべば △OCE と △ODE とにおいて

OC=OD、CE=DE、OE は共

ゆえに　$\triangle OCE \equiv \triangle ODE$

よって　$\angle COE = \angle DOE$

すなわち OE は ∠AOB を二等分する。　□

問 1.3.1.2　与えられた角を四等分せよ。

作図題 3　与えられた点を通り、与えられた直線に垂直な直線を引くこと。

(作図)　与えられた点を A、与えられた点を直線を XY とする。

A を中心として、XY と交わる円を書き、その交点を B、C とする。B、C を中心に、半径の等しい交わる円を書き、その交点の一つを D とする。A と D とを通る直線を引けば、これが求める直線である。

図:上の説明図

(証明)　各自試みよ。　□

作図題 4　与えられた半直線を一辺とし、与えられた角に等しい角を作ること。

(作図) **与えられた半直線を PQ、与えられた角を ABC とする。**

B を中心に任意の半径の円を書いて辺 AB、BC と交わる点を、それぞれ D、E とする。

P を中心に先の円と等しい円を書いて、PQ との交点を R とする。R を中心に線分 DE を半径とする円を書いて、さき」の円との交点を S とし、P から S を通る半直線を引けば、∠SPR は求める角である。

図:上の説明図

(証明) **各自試みよ。** □

問 1.3.1.3 **与えられた直線外の与えられた点を通って、この直線に平行な直線を書け。** (**作図題** 5) 図:上の説明図

問 1.3.1.4 **次の条件に当てはまる △ABC を作れ。**

1) $\mathrm{BC} = \ell$、$\mathrm{CA} = m$、$\mathrm{AB} = n$

2) $\mathrm{AB} = \ell$、$\mathrm{BC} = m$、$\angle\mathrm{B} = \alpha$

3) $\angle\mathrm{A} = \alpha$、$\angle\mathrm{B} = \beta$、$\mathrm{AB} = \ell$ 図:与えられた角・線分

問 1.3.1.5 **次の条件に当てはまる直角三角形を作れ。**

1) **斜辺が** α、**他の一辺が** b

2) **斜辺が** a、**一角が** α

問 1.3.1.6 60° **および** 30° **の角を作図せよ。**

1.3.2　移動

二点 A、B を結ぶ線分 AB が直線 XY によって垂直に二等分されるとき、点 A と B とは直線 XY に関して 対象の位置にある といい、点 A を点 B に移すことを、XY に関しての 対称移動 という。

図: 上の説明図

図形上の全ての点を、一つの直線 XY について対称移動したときに図形 K′ を、K を XY に関して対称移動した図形という。

問 1.3.2.1　与えられた △AbC と直線 XY とがある。この三角形を XY に関して対称移動した図形を書け。

図: 上の説明図

図形上のすべての点を、一定の向き $\overrightarrow{\mathrm{XY}}$ に一定の距離 XY だけ移動してできる図形 K′ を、K に平行移動 $\overrightarrow{\mathrm{XY}}$ を行った図形という。

図: 上の説明図

問 1.3.2.2　与えられた △ABC と直線 XY とがある。この三角形に平行移動 $\overrightarrow{\mathrm{XY}}$ を行った図形を書け。

問 1.3.2.3　ある図形 K に平行移動 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を行ったものを K′ とし、K′ に平行移動 $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を行ったものを図形 K″ とする。K を K″ に重ねるには、どんな移動を一回行えばよいか。

図: 上の説明図

森記　最後の文は紛らわしい。‘一回で移動するためには、どんな移動をすればよいか’

図形 K 上のすべての点を、一点 O を中心として、角 α だけ回転した

ときにできる図形 K′ を、点 O を中心に α だけ K を **回転移動** した図形という。 図: 上の説明図

問 1.3.2.4　△ABC と点 O がある。この三角形を O を中心に時計の針の方向に 60° 回転移動せよ。

O を中心とする回転角 180° の回転移動によって点 P が点 P′ に移ったとすると、O、P、P′ は一直線上にあって、O は PP′ の中点になる。

このとき P と P′ は点　O に関して **点対称の位置にある** といい、点 O を **点対称の中心** という。なおこの時の回転移動を O に関しての **点対称移動** という。これに対して直線に関しての対称移動を **線対称移動** ともいう。 図: 上の説明図

問 1.3.2.5　与えられた △ABC と点 O がある。この三角形を点 O に関して点対称移動せよ。

三角形の合同の定理を証明するときに、三角形を移動したように、移動は図形の性質を調べるときにしばしば利用される。

例 1.4　直線 XY の同側に二点 A。B がある。XY 上に適当な点 P を求め、AP+BP が最小になるようにせよ。

(解)　点 A の直線 XY に関する対称点を A′ とすれば

$$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}=\mathrm{A'P}+\mathrm{BP}$$

A′P+BP が最小になるのは、A′P と PB が一直線をなすときである。よって A′P と XY との交点に P を選べばよい。 図: 上の説明図 □

問 1.3.2.6　△ABC の中線を AM とすれば

$$\mathrm{AM} < \frac{1}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{AC})$$

である。(点 M に関して △AMC を点対称移動して考えよ。) 図: 上の説明図

練習問題 [3]

練習問題 3.1　次の二等辺三角形を作れ。

1) **底辺が a、等辺が b**

2) **底辺が a、高さが b**

3) **等辺が a、高さが b** 図: 上の説明図

練習問題 3.2　斜辺の長さが 5cm の直角二等辺三角形を作れ。

練習問題 3.3　△ABC を直線 a に関して対称移動したものを △A′B′C′ とし、これをさらに直線 b に関して対称移動したものを △A″B″ C″ とする。△ABC を △A″B ″C″ に一回の移動で移す方法を、次の二つの場合に分けて考えよ。

図: 上の問題図

1) **a と b が点 O で交わるとき。**

2) **a と b が平行なとき。**

練習問題 3.4　△ABC において AB>AC とする。BC の中点を M とすれば∠BAM と ∠CAM とはどちらが大きいか。(点対象を利用して考えよ。) 図: 上の説明図

総合問題 I

――― A ―――

総合問題 1.A.1 一つの角の二辺が他の一つの角の二辺にそれぞれ平行なときは、その二つの角は等しいか、または補角をなす。

総合問題 1.A.2 ある角の二辺が他の角の二辺にそれぞれ垂直のときは、これらの二角は等しいか、または補角をなす。

総合問題 1.A.3 △ABC において外角 B、C の和が外角 A の 3 倍ならば内角 A は直角である。

総合問題 1.A.4 右の図のような星形の図形がある。とがった所の五つの角の和を求めよ。 図: 一筆書きの星 (?ダビデの星)

総合問題 1.A.5 △ABC の辺 AB、AC をそれぞれ辺として、その外側に正三角形 ABD、ACE を作ると、BD と CD は等長で、かつ抗核は°である。 図: 上の説明図

総合問題 1.A.6 右の図において

AB=DC、AC=DB

である。AC と DB の交点を E とすれば、

BE=CE

である。 図: 上の説明図

総合問題 1.A.7 △ABC の ∠A の二等分線を AD とすると

AB>BD

である。 図: 上の問題図

━━━ B ━━━

総合問題 1.B.1　次の図で角の大きさを求めよ。

図: 上の問題図

総合問題 1.B.2　三角形の一つの角の二等分線は、その頂点から対辺に引いた垂線と中線の間にある。

総合問題 1.B.3　合同な一種類の正三角形で、すきまなくタイルを張るには、どんな形のものでなければならないか。

総合問題 1.B.4　辺数が p、q、r である三つの正多角形が一点のまわりに重ならず、すきまなく並んでいるときは、次の関係がある。

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{1}{2}$$

図: 上の説明図

総合問題 1.B.5　△ABC の中線を AD とし、∠ADB、∠ADC の二等分線が AB、AC と交わる点をそれぞれ P、Q とすれば

$$\mathrm{PQ}<\mathrm{BP}+\mathrm{CQ}$$

である。

図: 上の説明図

補充問題 [1]

補充問題 1.1 $\triangle$ABC で $\angle$A$>\angle$B$>\angle$C ならば

$$\angle\mathrm{A}>60^\circ、\angle\mathrm{B}<90^\circ、\angle\mathrm{C}<60^\circ、$$

である。

補充問題 1.2 前問の三角形と辺 AB、AC とそれぞれ D、E で交わり、

$$\mathrm{AD}=\mathrm{AE}$$

となるように直線 DE を引いて、CB の延長との交点を F とすれば

1) $\angle\mathrm{DFC} = \frac{1}{2}(\angle\mathrm{B}-\angle\mathrm{C})$

2) $\angle\mathrm{DFC}<45^\circ$

となる。

補充問題 1.3 $\triangle$ABC の各外角の二等分線を三辺とする $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ を作り、次に $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ の各外角の二等分線を三辺とする三角形を作る。順次このようにして作った三角形は次第に正三角形に近ずく。

補充問題 1.4 正三角形 ABC の辺 AC、CB の上にそれぞれ点 P、Q があって、AP=CQ であると、AQ と BP とのなす角は一定である。

補充問題 1.5 正三角形 ABC の $\angle$B、$\angle$C の二等分線の交点を O とし、O からそれぞれ AB、AC に平行線を引けば、それらの直線によって BC は三等分される。

補充問題 1.6 $\triangle$ABC の辺 AB 上の一点を E とし、BD の中点 M において DE に垂直線を引き、辺 AC またはその延長との交点を F とすれば

$$\mathbf{BE+CF \leqq EF}$$

である。 図: 上の説明図

補充問題 1.7 △ABC **において** B、C **から引いた垂線** BH、CK **上にそれぞれ点** D、E **を取り、**BD=AC、CE=AB **とすれば、**△ADE **は直角二等辺三角形である。** 図: 上の説明図