



講義ノートの周辺

Part I 高等学校数学I幾何

2. 直線図形

森 隆一

$\alpha\beta\gamma\delta\epsilon(\varepsilon)\zeta\eta\theta(\vartheta)\iota\kappa\lambda\mu\nu\xi\omicron\pi(\varpi)\rho(\varrho)\sigma\varsigma\tau\nu\phi(\varphi)\chi\psi\omega$

$\Gamma\Delta\Theta\Lambda\Xi\Pi\Sigma\Upsilon\Phi\Psi\Omega$

ABCDEF GHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

αβγδεζηζηκλμνξοπρσςτσυφ(φ)χψω

abcdefghijklmnopqrsubvwxηζ

ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ



目次

第2章	直線図形	41
2.1	平行四辺形	41
2.1.1	平行四辺形	41
2.1.2	三角形の二辺の中点	46
2.2	多角形の面積	51
2.2.1	多角形の面積	51
2.2.2	ピタゴラスの定理	55
2.3	相似	60
2.3.1	平行線と比例	60
2.3.2	相似	66

第2章 直線図形

アリストテレス Pythagoras (B. C. 580 ? ~ 500 ?)

ギリシャのサモス島に生まれ、エジプトに学んだのち南イタリアのクロトンに帰り、学校を建てて哲学点数学などを教えた。ではピタゴラス学派という秘密結社作り、研究結果を発表しなかったのも結果は残っていない。またピタゴラスの定理をだれが発見したのか確実なことはわかっていない。

(アリストテレスの写真)

2.1 平行四辺形

2.1.1 平行四辺形

四角形のうちで、一組の対辺が平行なものを **台形** といい、平行な辺を **底辺** (一方を上辺、他方を下辺)、他の一組の辺を **脚** という。台形のうちで特に足の等しいものを **等脚台形** という。

注意 台形は普通脚の平行でないものをいう

四角形のうちで、二組の対辺が平行なものを **平行四辺形** という。平行

四辺形 ABCD は (小さい平行四辺形)ABCD と書くこともある。

定理 14 平行四辺形には次の性質がある。

- (i) 対角線は合同な二つの三角形に分ける。
- (ii) 二組の対辺はそれぞれ等しい。
- (iii) 二組の対角はそれぞれ等しい。
- (iv) 対角線は互いに他を二等分する。

(証明) (i) の証明 平行四辺形 ABCD において、対角線 AC を引き、
 $\triangle ABC$ と $\triangle CDA$ とをくらべると

$$AB \parallel DC \text{ から} \quad \angle BAC = \angle DCA \quad (1)$$

$$AD \parallel BC \text{ から} \quad \angle BCA = \angle DAC \quad (2)$$

また AC は共通

$$\text{よって} \quad \triangle ABC \equiv \triangle CDA \quad (3)$$

図:上の説明図

森記 ‘(i) の証明’ の前に、‘平行四辺形 ABCD を考える’ とすべきであろう。

(ii) の証明 (3) から $AB=CD$ 、 $BC=DA$

(iii) の証明 (1) と (2) から $\angle A = \angle C$

(3) から $\angle B = \angle D$

(iv) の証明 各自試みよ。 □

問 2.1.1.1 平行な二直線の共通垂線の長さは等しい。

平行線の共通垂線の長さを **平行線間の距離** という。

図:左の説明図

問 2.1.1.2 $AD \parallel BC$ の等脚台形 $ABCD$ において、 $\angle A = \angle D$ 、 $\angle B = \angle C$ である。

問 2.1.1.3 等脚台形の対角線の長さは等しい。

四辺形が平行四辺形であるかどうかを見分ける場合には、定義のほかに次の定理が使われる。

定理 15 平行四辺形には次の性質がある。

- (i) 二組の対辺がそれぞれ等しいとき。
- (ii) 二組の対角がそれぞれ等しいとき。
- (iii) 一組の対辺が平行で等しいとき。
- (iv) 対角線が互いに他を二等分するとき。

(証明) (i) を証明しよう。四辺形を $ABCD$ とし、対角線 AC を引けば、 $\triangle ABC$ と $\triangle CDA$ とにおいて

図:左の説明図

中断

$AB=CD$ 、 $BC=DA$ 、 AC は共通

であるから $\triangle ABC \cong \triangle CDA$

ゆえに $\angle BAC = \angle DCA$

$\angle BCA = \angle DAC$

これより $AB \parallel DC$ 、 $AD \parallel BC$

よってこの四辺形は平行四辺形である。

その他の証明は各自試みよ。

□

問 2.1.1.4 右の図は平行定木といって、平行線を引くための器具である。
この構造と原理を説明せよ。 図:平行定木

問 2.1.1.5 平行四辺形 ABCD の辺 BC、AD の中点をそれぞれ E、F とすれば、 $AE \parallel FC$ である。

問 2.1.1.6 平行四辺形 ABCD の対角線の交点を O とし、BO と DO 戸の中点をそれぞれ M、N とすれば、四辺形 AMCN は平行四辺形である。

さて、ある命題

A ならば B である。 (1)

が正しいとき、A を B の **十分条件** といい、B を A の **必要条件** という。

もし (1) の逆の命題

B ならば A である。 (2)

も正しいならば、A は B の **充分条件** であると同時に **必要条件** にもなっている。このとき、A を B の **必要十分条件** という。必要十分条件を単に **条件** ということもある。

定理 15 の四つの条件は、いずれも四辺形が平行四辺形となるための必要十分条件であって、四辺形が平行四辺形かどうかを見分けるために用いられる。

問 2.1.1.7 次の条件のうち、四角形 ABCD が等脚台形となるために必要なものはどれか。十分なものはどれか、必要十分なものはどれか。

1) $AB=CD$

2) $AB=CE$ 、 $AC=BD$

3) $AB=AD=DC$ 、 $\angle A = \angle D$ 4) $\angle A = \angle C$ 、 $\angle A = \angle D$

四角形のうちで、四つの角の等しいもの、すなわち等角四角形を **長方形** といい、四つの辺が等しいもの、すなわち等辺四角形を **ひし形** という。長方形 ABCD を $\square ABCD$ と書き、正方形 ABCD を $ABCD$ と書くことがある。

以上で学んだいろいろな四角形の間を関係を図示すれば、次のようになる。

左から 四角形、台形、等脚台形・平行四辺形、長方形・ひし形、正方形
文字を図形の中に書いたものを矢印で結ぶ

問 2.1.1.8 長方形の対角線は、等長で互いに他を二等分する。逆に対角線が等長で互いに他を二等分する四角形は長方形である。

問 2.1.1.9 ひし形の対角線は互いに他を垂直に二等分する。逆に対角線が互いに他を垂直に二等分する四角形はひし形である。 図:上2題の説明図

2.1.2 三角形の二辺の中点

平行四辺形の性質を用いて、三角形の二辺の中点を結ぶ線分の性質を調べてみよう。

定理 16 三角形の二つの辺の中点を結ぶ線分は、残りの辺に平行で、その半分に等しい。

(証明) $\triangle ABC$ の二辺 AB 、 AC の中点をそれぞれ D 、 E とする。 DE を E の方に延長して、 DE に等しく EF をとり、 F と C を結べば

$$\triangle ADE \cong \triangle CFE$$

森記 二辺夾角の一致などを書くことが望まれる。

ゆえに $\angle ADE = \angle CFE$

よって $AD \parallel CF$ かつ $AD = CF$

したがって $BD \parallel CF$ かつ $BD = CF$

定理 15 の (iii) によって $DECF$ は平行四辺形であるから

$$DF \parallel BC \text{ かつ } DF = BC$$

よって $DE \parallel BC$ かつ $DE = \frac{1}{2}BC$

図:上の説明図



系 16.1 三角形の一つの辺の中点を通り、他の辺に平行に引いた直線は、残りの辺の中点を通る。

(証明) $\triangle ABC$ の辺 BC の中点 D を通り、 BC に平行に引いた直線が辺 AC と交わる点を E とする。

AC の中点を E' とし、 D と E' を結べば、定理 16 によって

$$DE' \parallel BC$$

また仮定によって $DE \parallel BC$

ゆえに DE は DE' に一致し、 E は E' に一致する。言い換えれば E は AC の中点となる。

森記 ‘平行線の性質より’ のような文が望まれる。

問 2.1.2.1 四角形の各辺の中点を順に結べば、どんな四角形ができるか。

問 2.1.2.2 三角形の三辺の中点を結ぶ線分は、この三角形を合同な四つの三角形に分ける。

例 2.1 $AD \parallel BC$ である台形 $ABCD$ の二辺 AB 、 DC の中点をそれぞれ M 、 N とすれば

$$MN \parallel BC, \quad MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$$

である。

図:上の説明図

(解) AN の延長と BC の延長との交点を E とすれば

$$DN = CN$$

$$\angle AND = \angle ENC$$

$$\angle ADN = \angle ECN$$

ゆえに $\triangle ADN = \triangle ECN$

よって $AD = CE$ 、 $AN = NE$

△ABE において、M は AB の中点、N は AE の中点であるから

$$MN \parallel BE, \quad MN = \frac{1}{2}BE$$

ゆえに $MN \parallel BC$ 、 $MN = \frac{1}{2}(BC+CE) = \frac{1}{2}(BC+AD)$ □

問 2.1.2.3 $AD \parallel BC$ である台形 ABCD の対角線 AC, bd の中点を P、Q とすれば

$$PQ \parallel BC, \quad PQ = \frac{1}{2}(AD+BC)$$

である。

森記 $a \sim b$ は a と b の差 $= \max\{a, b\} - \min\{a, b\}$ であろう。

三角形の三つの中線の間には、次の重要な関係がある。

定理 17 三角形の三つの中線は一点で交わる。

(証明) 三角形の二つの中線 BM、CN の交点を G とし、A と G とを結ぶ線分の延長が BC と交わる点を L とする。線分 AG の延長上に AG に等しく GD をとり、B と C、D を結ぶ。

△ADC において G は AD の中点、M は AC の中点であるから

$$GM \parallel DC$$

ゆえに $BG \parallel DC$

同様にして $CG \parallel DB$

よって四辺形 GBDC は平行四辺形であるから、GD は DC を二等分する。すなわち AL は中線である。ゆえに、三つの中線 AL、BM、CN は一点 G で交わる。

この三つの中線の交点を **重心** といい、普通 G で表す。重心は中線をどんな割合に分けるであろうか。上の証明から

$$AG=GD=2GL$$

ゆえに $AG : GL = 2 : 1$

系 17.1 三角形 ABC の重心 G は中線 AL 、 BM 、 CN を $2 : 1$ の割合に分ける。

三角形の重心は、厚さ一様な三角形の板の重心 (重力の場合) にあたる。これを実験するには、厚紙から三角形を切り取り、その重心に糸を通してつりさげてみればよい。

図:上の写真

問 2.1.2.4 三角形の二つの中線の長さが等しいならば、それは二等辺三悪系である。

練習問題 [4]

練習問題 4.1 長方形の各辺の中点を順に結んでできる四角形は何か。またひし形の各辺の中点を順に結んでできる四角形は何か。

練習問題 4.2 四角形の相対する辺の中点を結ぶ直線は、対角線の中点を結ぶ線分を二等分する。

練習問題 4.3 $\triangle ABC$ の中線 AD の中点を E とし、 BE の延長と辺 BC との交点を F とすれば $AF : FC = 1 : 2$ である。 図:上の説明図

練習問題 4.4 平行四辺形 $ABCD$ で、 AB 、 CD の中点をそれぞれ E 、 F とし、 A と F 、 C と E を結べば、これらの二直線は対角線 BD を三等分する。 図:上の説明図

練習問題 4.5 二等辺三角形の底边上の動点から、等しい二辺にそれぞれ平行線を引いて作った平行四辺形の周の長さは一定である。

練習問題 4.6 $\triangle ABC$ の辺 AB 、 AC 上にそれぞれ D 、 E をとるとき、 BD と CE とが互いに他を二等分することがあるか。

練習問題 4.7 直角三角形の斜辺の中点は、三つの頂点から等距離にある。 図:上の説明図

練習問題 4.8 平行四辺形の四つの角の二等分線によってつくられる四角形はどんな四角形か。 図:上の説明図

練習問題 4.9 $\triangle ABC$ の外角 A の二等分線に、 B および C から引いた垂線の足を D 、 E とし、辺 BC の中点を M とすれば

$$MD = ME = \frac{1}{2}(AB+AC)$$

である。 図:上の説明図とヒント

練習問題 4.10 前問の外角 A の二等分線の代わりに、内角 A の二等分線とすればどのようなになるか。

2.2 多角形の面積

2.2.1 多角形の面積

平面において面積を考える。満席は、単位の長さを一辺とする正方形の面積を単位として測る。よく知られているように、長方形の面積については次の定理がある。

定理 18 縦の長さが a 、横の長さが b の長方形の面積を S とすれば、次の等式が成り立つ。

$$S = ab$$

森記 '面積は ah である' としないのは？

この定理をもとにして、種々の多角形の面積を求める方法を考えよう。面積の等しいことを **等積** という。合同な図形は等積である。これを使えば合同でなくても等積な図形を知ることができる。

森記 この部分は歯切れがよくない。

平行四辺形 $ABCD$ の面積を S と表すように、図形の記号で、その図形の面積を表すのが普通である。

森記 上で、2つの平行四辺形は記号を用いている。AB で線分 AB の長さを表したように $ABCD$ としたほうがよいと思う。

定理 19 底辺の長さが a 、高さが h の平行四辺形の面積を S とすれば、次の等式が成り立つ。

$$S = ah$$

(証明) 平行四辺形を ABCD とし、B、C から辺 AD またはその延長に引いた垂線の足を E、F とすれば $\triangle ABE \equiv \triangle DCF$

ゆえに $\triangle ABE = \triangle DCF$

よって (四角形)BCDE - $\triangle ABE =$ (四角形)BCDE - $\triangle DCF$

すなわち (平行四辺形)ABCD = (長方形)BCFE

よって $S = ah$ □

定理 20 底辺の長さが a 、高さが h の三角形の面積を S とすれば、次の等式が成り立つ。

$$S = \frac{1}{2}ah$$

(証明) 三角形を ABC とし、A から辺 BC に、C から辺 AB に平行線を引いて、その交点を D とすれば

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}(\text{平行四辺形})ABCD$$

ゆえに $S = \frac{1}{2}ah$ 図:上の説明図 □

系 20.1 底辺と高さのそれぞれ等しい二つの三角形の面積は等しい。

系 20.2 高さが等しい二つの三角形の面積の比は底辺の比に等しく、底辺が等しい二つの三角形の面積の比は高さの比に等しい。

(証明) 二つの三角形の底辺を a 、 a' 、高さを h 、 h' 、面積を S 、 S' とすれば

$$S = \frac{1}{2}ah, S' = \frac{1}{2}a'h'$$

ゆえに $S : S' = \frac{1}{2}ah : \frac{1}{2}a'h'$

よって $h = h'$ ならば $S : S' = a : a'$

また $a = a'$ ならば $S : S' = h : h'$

□

問 2.2.1.1 $\triangle ABC$ の辺 BC 上の任意の点を D とすれば

$$\triangle ABD : \triangle ACD = BD : CD$$

問 2.2.1.2 右の図で BC と AA' とが平行ならば $\triangle ABC$ と $\triangle A'BC$ とは等積である。

図:上問題図

問 2.2.1.3 $AD \parallel BC$ の台形 $ABCD$ の対角線の交点を O とすれば

$$\triangle AOB \equiv \triangle COD$$

である。

図:上の説明図

問 2.2.1.4 三角形の中線は、その三角形の面積を二等分する。

森記 面積は数値であるから、‘等積な二つの三角形に分ける’のほうがよい。

定理 21 二つの底辺の長さが a 、 b で高さが h の台形の面積を S とすれば、次の等式が成り立つ。

$$S = \frac{1}{2}(a + b)h$$

森記 突然、定理が述べられている。

問 2.2.1.5 定理 21 を証明せよ。

問 2.2.1.6 上底が 15cm、高さが 5cm、面積が 100cm^2 の台形の下底は何 cm か。

例 2.2 与えられた四角形と面積の等しい三角形を作れ。

(作図) 与えられた四角形を ABCD とする。頂点 A から対角線 BD に平行線を引いて、辺 BC の延長と交わる点を E とする。D と E を結べば、 $\triangle DEC$ は求める三角形となる。 図:上の説明図

(証明) $AE \parallel BD$ であるから、 $\triangle ABD$ と $\triangle EBD$ とは、高さと同底辺とがそれぞれひとしい、したがって

$$\triangle ABD = \triangle EBD$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad (\text{四角形})ABCD &= \triangle ABD + \triangle DBC \\ &= \triangle EBD + \triangle DBC = \triangle DEC \end{aligned}$$

よって $\triangle DEC$ は条件に適している。 □

森記 幾つか気になった点を挙げる。‘ $\triangle ABD$ と $\triangle EBD$ とで底辺 BD は共通で、高さが同じ’、‘条件に適する’は‘条件をみたす’ではないか。

問 2.2.1.7 $\triangle ABC$ の辺 BC 上の与えられた点 P を通る直線を引き、その三角形を二等分したい。右の図を参考にして考えよ。 図:問題図

2.2.2 ピタゴラスの定理

直角三角形の三辺の細田には、**ピタゴラスの定理**としてよく知られている次の定理がある。

定理 22 直角三角形の直角をはさむ二辺の平方の和は、斜辺の平方に等しい。すなわち $\triangle ABC$ において $\angle A = 90^\circ$ ならば

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

である。

(証明) 三辺 AB 、 AC 、 BC をそれぞれ一辺とする正方形 $ABFG$ 、 $ACKH$ 、 $BCDE$ を、この三角形の外側に造る。A から BC に垂線 AL を引き、その延長と DE との交点を M とする。また E と A 、 F と C を結ぶ。そうすれば 図:上の説明図

$$\triangle FBC \equiv \triangle ABE$$

ところが $\angle A = 90^\circ$ であるから C 、 A 、 G は一直線上にあって、その直線は BF に平行である。よって

$$(\text{長方形})ABFG = 2\triangle FBC \quad (= 2\triangle FBA)$$

また $AM \parallel BE$ から

$$(\text{長方形})BEML = 2\triangle ABE$$

$$\text{ゆえに} \quad (\text{正方形})ABFG = (\text{長方形})BEML \quad (1)$$

$$\text{同様にして} \quad (\text{正方形})ACKH = (\text{長方形})CDML \quad (2)$$

$$(1) + (2) \quad (\text{正方形})ABFG + (\text{正方形})ACKH = (\text{正方形})BCDE$$

$$\text{すなわち} \quad AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad \square$$

問 2.2.2.1 一辺の長さが a の正三角形の高さを h 、面積を S とすれば

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a, \quad S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

である。

問 2.2.2.2 a 、 b を与えられた線分の長さとするとき、長さが $\sqrt{a^2 + b^2}$ 、 $\sqrt{a^2 - b^2}$ ($a > b$) に等しい線分を作れ。 (作図題 4)

問 2.2.2.3 長さ a の線分が与えられたとき、その $\sqrt{2}$ 倍、 $\sqrt{3}$ 倍、… の線分を次々に通るには図のようにすればよい。この理由を説明せよ。

図:上の問題図

問 2.2.2.4 ピタゴラスの定理の証明の図で、次の関係がある。

$$AB^2 = RL \cdot BC \quad AC^2 = L \cdot BC$$

系 22.1 三角形の一辺の平方が他の二辺の平方の和に等しいときは、その三角形は直角三角形である。すなわち $\triangle ABC$ において

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad (1)$$

ならば $\angle A = 90^\circ$ である。 (ピタゴラスの定理の逆)

(証明) $DE=AB$ 、 $DF=AC$ で、かつ $\angle A = 90^\circ$ の三角形 DEF を考えると、ピタゴラスの定理によって

図:上の説明図

$$EF^2 = DE^2 + DF^2$$

ゆえに $EF^2 = AB^2 + AC^2$ (2)

(1) と (2) から $BC=EF$

ゆえに 三辺の合同によって

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

ゆえに

$$\angle A = \angle D = 90^\circ$$

□

問 2.2.2.5 $m > n > 0$ のとき、三つの辺の長さが $m^2 + n^2$ 、 $m - n$ 、 $m^2 - n^2$ の三角形はどんな形か。

問 2.2.2.6 前問の m 、 n に適当な整数を与えることによって、三辺の長さが整数で表される直角三角形を三種類求めよ。

例 2.3 $\triangle ABC$ において、中線 AM を引けば

$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$

である。

(解) A から辺 BC またはその延長上に引いた垂線を AH とし、図のように線分の長さを表す。 図:上の問題図2つ

H が M に関して C と同じ側にあるとし、 $\triangle ABH$ にピタゴラスの定理を用いれば

$$c^2 = BH^2 + AH^2 = (a + x)^2 + y^2 = a^2 + 2ax + x^2 + y^2$$

$$\text{ゆえに} \quad c^2 = a^2 + 2ax + m^2 \quad (1)$$

$$\text{同様にして} \quad b^2 = a^2 - 2ax + m^2$$

$$(1) + (2) \quad c^2 + b^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$

$$\text{すなわち} \quad AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$

□

問 2.2.2.7 三点 A 、 B 、 C が一直線上もある場合にも $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$ が成り立つ。

問 2.2.2.8 $\triangle ABC$ で、 $BC=6\text{cm}$ 、 $CA=3\text{cm}$ 、 $AB=5\text{cm}$ のとき、三つの中線の長さを求めよ。

問 2.2.2.9 平行四辺形の各辺の平方の和は、対角線の平方の和に等しい。

練習問題 [5]

練習問題 5.1 平行四辺形 $ABCD$ の対角線 AC 上の点 P を通り、各辺に平行な直線 EF 、 GH を引き、図のように辺と交わらせれば

$$(\text{平行四辺形})PEBG = (\text{平行四辺形})PFDH \quad \text{図:上の問題図}$$

練習問題 5.2 $\triangle ABC$ の中線 AM 上の任意の点 P と B 、 C とを結べば

$$\triangle ABP = \triangle ACP$$

練習問題 5.3 $\triangle ABC$ の重心を G とすれば

$$\triangle ABG = \triangle BCG = \triangle ACG$$

練習問題 5.4 台形 $ABCD$ ($AD \parallel BC$) の辺 BC の中点を M とすれば、 $\triangle ABM$ の面積は台形 $ABCD$ の面積の半分に等しい。

練習問題 5.5 上底が 10cm 、下底が 20cm 、他の二辺がともに 13cm の等脚台形の面積はいくらか。

練習問題 5.6 $\triangle ABC$ の頂点 A から底辺 BC またはその延長上に引いた垂線の足を D とすれば $AB^2 - AC^2 = DB^2 - DC^2$

練習問題 5.7 直角三角形の斜辺を一辺とする正三角形の面積は、他の二辺をそれぞれ一辺とする正三角形の面積の和に等しい。

練習問題 5.8 四角形 ABCD において

$$AB^2 + BC^2 = CD^2 + DA^2$$

ならば B、D は対角線 AC の中点から等距離にある。

練習問題 5.9 与えられた二つの線分を二辺とする三角形の面積は、その夾角が直角のとき最大となる

2.3 相似

2.3.1 平行線と比例

線分の比について考えよう。

線分 AB 上に点 P があって $AP : PB = m : n$ であるとき、点 P は線分 AB を $m : n$ の比に **内分** するという。

また線分 AB の延長上に点 P があって、上の式と同じ関係があるときには、点 P は線分 AB を $m : n$ の比に **外分** するという。図:上の説明図

森記 内分・外分は向きを伴う概念である。すなわち、‘線分 AB を $m : n$ の比に内分する’と‘線分 BA を $m : n$ の比に内分する’とは異なる。

問 2.3.1.1 長さ a の線分 AB を $m : n$ に内分する点を P、外分する点を Q とすれば、次の等式が成り立つ。

$$(1) \quad AP = \frac{ma}{m+n}, \quad BP = \frac{na}{m+n}$$

$$(2) \quad AQ = \frac{ma}{m-n}, \quad BQ = \frac{na}{m-n} \quad (m \neq n)$$

上の問いからわかるように、 $m : n$ を与えられたとき、AP、AQ のながさはおのおのの一つしか定まらないから。与えられた線分を与えられた比に内分または外分する点はおのおの一つしかない。

問 2.3.1.2 長さ a の線分を $m : n$ ($m > n$) に内分する点を P、外分する点を Q とするとき、線分 PQ の長さを求めよ。

次に線分の比と平行線との関係について学ぼう。

定理 23 三角形の一つの辺に平行な直線は、他の二辺を等しい比に内分 (または外分) する。すなわち $\triangle ABC$ の辺 BC に平行な直線が辺 AB 、 AC (またはそれらの延長) と交わる点をそれぞれ D 、 E とすれば

$$AD : DB = AE : EC \quad \text{図:上の3つの説明図}$$

(証明) C と D 、 B と E をそれぞれ結ぶ。 $\triangle ADE$ と $\triangle DBE$ とは頂点 E からの高さが共通であるから

$$\triangle ADE : \triangle DBE = AD : DB \quad (1)$$

同様にして $\triangle ECD : \triangle DBE = AE : EC \quad (2)$

しかるに $DE \parallel BC$ であるから

$$\triangle DBE = \triangle ECD$$

これによって (1) と (2) との左辺は等しいので、右辺もまた等しいので

$$AD : DB = AE : EC \quad \square$$

系 23.1

(i) $AB : BD = AC : CE$ (ii) $AD : AB = AC : CE$

(iii) $AD : AB = DE : BC$

問 2.3.1.3 系 23.1 の (i) と (ii) を証明せよ。

問 2.3.1.4 D から AC に平行線を引いて BC との交点を F とし、系 23.1 の (iii) を証明せよ。

問 2.3.1.5 次ページの図において、 $DE \parallel BC$ である。 x の値はいくらか。

図:上の問題図

定理 23 の逆もまた正しい。すなわち

系 23.2 三角形の二辺を同じ比に内分 (または外分) する点を結ぶ線分は、残りの辺に平行である。

問 2.3.1.6 $\triangle ABC$ 内に一点 P をとり、 AP 上の一点 M から AB 、 AC にそれぞれ平行な直線 MN 、 ML を引いて PB 、 PC とそれぞれ N 、 L で交わせると、 $NL \parallel BC$ である。

作図題 5 与えられた線分 AB を与えられた線分の比 $m : n$ に内分 (または外分) する点を求めること。

まず内分のときを考えよう。

(作図) A を通り AB に重ならない直線 AC を引き、この上に A から m に等しく AD を、続いて n に等しく DE を取る。 B と E とを結び、 D から EB に平行線を引いて、 AB と交わる点を P とすれば、 P は求める内分点である。

図:上の説明図

(証明) 各自考えよ。

外分のときは、内分の作図で、点 E を D に関して A と同じ側にとればよい。

問 2.3.1.7 与えられた線分 AB を $5 : 2$ に内分せよ。また、 $5 : 2$ に外分せよ。

問 2.3.1.8 a 、 b 、 c を与えられた線分の長さとするとき、比例式

$$a : b = c : x$$

にあてはまる長さ x の線分を作れ。

図:上のほぼヒント図

問 2.3.1.9 長方形 ABCD と線分 EF がある。この長方形と面積が等しくて、EF を一辺とする長方形を作るにはどのようにすればよいか。

図:上の説明図

三角形 ABC で AB と AC とが等しいならば、角 A の二等分線 AD は辺 BC の中点を通る。もし、AB と AC とが等しくないならば AD はどこを通るであろうか。これについては次の定理がある。

定理 24 $\triangle ABC$ の内角 (または外角) A の二等分線は、辺 BC を他の二辺の比 $AB : AC$ に内分 (または外分) する。

(証明) $\triangle ABC$ の内角 A の二等分線が辺 BC と交わる点を D とする。

図:上の説明図

すなわち前のページの図で

$$\alpha = \beta \tag{1}$$

C から DA に平行線を引いて、辺 AB の延長と交わる点を E とすれば

$$\beta = \gamma \tag{2}$$

$$\alpha = \delta \tag{3}$$

(1)、(2)、(3) から $\gamma = \delta \tag{3}$

ゆえに $AE = AC$

しかるに $DA \parallel CE$ であるから

$$BD : DC = BA : AE$$

よって $BD : DC = AB : AC$

外角 A の二等分線の時も同様にして称される。 □

内角 A および外角 A の二等分線はそれぞれひとつしかないから、上の定理の逆の正しいことがわかる。

系 24.1 $\triangle ABC$ の辺 BC を $AB : AC$ に内分 (または外分) する点 D と A とを結ぶ線分は、内角 (または外角) を二等分する。

問 2.3.1.10 上の系を証明せよ。

問 2.3.1.11 $\triangle ABC$ で $AB=12\text{cm}$ 、 $BC=11\text{cm}$ 、 $CA=8\text{cm}$ のとき、内角 A の二等分線が辺 BC と交わる点を D とすれば、BD、CD の長さはいくらか。また外角 A の二等分線が辺 BC の延長と交わる点を E とすれば、BE、CE の長さはいくらか。

問 2.3.1.12 $\triangle ABC$ の辺 BC の中点を D とし、 $\angle ADB$ と $\angle ADC$ がそれぞれ辺 AB、AC と交わる点を P、Q とすれば、 $PPQ \parallel BC$ である。

図:上の説明図

線分 AB を同じ比に内分および外分する点を D、E とするとき、すなわち、D、E の一方は線分 AB 上にあり、他方は線分 AB の延長上にあつて

$$AD : DB = AE : EB$$

のとき、D、E は線分 AB を **調和に分ける** といい、A、B、D、E は **調和列点** をなすという。

問 2.3.1.13 $\triangle ABC$ で内角 A および外角 A の二等分線が、辺 BC およびその延長と交わる点を D 、 E とすれば、 B 、 C 、 D 、 E は調和列点をなす。

問 2.3.1.14 A 、 D 、 B 、 E がこの順にあって、 D 、 E が A 、 B を調和に分けるときは $AD = x$ 、 $AB = y$ 、 $AE = z$ とすれば、次の等式が成り立つ。

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$$

2.3.2 相似

二つの図形の一方がてょうを一定の割合で拡大または縮小したものであるとき、この二つの図形は **相似** であるという。 図:乳児の写真2つ

図形を拡大するとか、縮小するとかいうことは、すべての角の大きさを変えないので、全ての線分の長さだけを一定の割合に延ばしたり縮めたりすることである。したがって、二つの相似な図形の対応する角は等しく、対応する線分の比は一定である。この一定の比を **相似比** という。

特に多角形では、全ての辺の大きさと角の大きさとを決めれば、その形と大きさは決まるので、その相似は辺と頂角だけの関係で示すことができる。

すなわち二つの五角形 $ABCDE$ と $A'B'C'D'E'$ とが相似であるためには、次の二つの条件が成り立てばよい。 図:相似な2つの五角形

1. 対応辺の比が等しい。

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \dots = \frac{EA}{E'A'} \quad (1)$$

2. 対応角が等しい。

$$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \dots, \angle E = \angle E' \quad (2)$$

二つの五角形 $ABCDE$ と $A'B'C'D'E'$ が相似であることは

$$\text{五角形 } ABCDE \sim \text{五角形 } A'B'C'D'E'$$

のように書く。この表し方の中には頂点の対応まで含めるのがよい。

森記 原本で用いられている‘Sをよこにした’ようなフォントはなかったので、‘~’で代用した。

Wikipedia「図形の相似」では、‘任意の2点間の距離が一定のスカラー倍’と書かれている。

問 2.3.2.1 正五角形は全て相似である。

問 2.3.2.2 長方形の長い辺の中点を結んでこれを二等分するとき、元の長方形と相似な長方形が得られるならば、その二辺の比は $\sqrt{2} : 1$ である。

特に二つの三角形の条件として、次の重要な定理が成り立つ。

定理 25 二つの三角形は次のおのおの場合に相似である。

- (i) 二角がそれぞれ等しいとき。
- (ii) 一角が等しく、それを挟む二辺の比が等しいとき。
- (iii) 三辺の比が等しいとき。

(証明) (i) $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ とにおいて

$$\angle A = \angle A', \quad \angle A = \angle B'$$

とする。

図:相似な2つの三角形

まずこの条件から

$$\angle A = \angle A', \quad \angle B = \angle B', \quad \angle C = \angle C' \tag{1}$$

となることは明らかである。

次に $\angle A'$ を $\angle A$ に重ね、 $A'B'$ が AB 上に $A'C'$ が AC 上に乗るようにする。そのときの B' 、 C' の位置をそれぞれ D 、 E とすれば

$$\angle ADE = \angle B' = \angle B$$

ゆえに

$$DE \parallel BC$$

よって

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$$

これから

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \quad (2)$$

(1) (2) とによって $\angle ABC \sim \angle A' B' C'$

(ii) 各自試みよ。

(iii) $\triangle ABC$ と $\triangle A' B' C'$ とにおいて

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} \quad (1)$$

とする。

図: 相似な2つの三角形

AB、AC またはそれらの延長上にそれぞれ A'B'、A'C' に等しく AD、AE を取り、D と E とを結べば、(1) によって

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC} \quad \text{ゆえに} \quad DE \parallel BC$$

ゆえに定理 23 の系 1 によって

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} \quad \text{すなわち} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{DE} \quad (2)$$

(1) (2) とから $DE = B'C'$

ゆえに $\triangle ADE \equiv \triangle A' B' C'$

ところが $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

ゆえに $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$

□

例 2.4 直角三角形 $\triangle ABC$ の直角頂 A から斜辺 BC に引いた垂線の足を D とすれば $AD^2 = BD \cdot CD$ である。

(解) $\triangle ABD$ と $\triangle CAD$ とにおいて

$$\angle ADB = \angle CDA (= 90^\circ)$$

$$\angle BAD = 90^\circ - \angle DAC = \angle ACD$$

よって $\triangle ABD \sim \triangle CAD$

ゆえに $BD : AD = AD : CD$

よって $AD^2 = BD \cdot CD$

□

問 2.3.2.3 二つの相似な三角形の中線の比は相似比に等しい。

問 2.3.2.4 二つの相似な三角形の垂線の比は相似比に等しい。

問 2.3.2.5 相似三角形の面積の比は、相似比の平方に等しい。

問 2.3.2.6 直角三角形 ABC の直角頂 A から斜辺に引いた垂線を AD とすれば、次の関係がある。

$$(1) \quad AB^2 = BD \cdot BC \qquad (2) \quad AC^2 = CD \cdot BC$$

$$(3) \quad AB^2 : AC^2 = BD : CD$$

問 2.3.2.7 前問の (1) と (2) とを使ってピタゴラスの定理を証明せよ。

一点 O と $\triangle ABC$ の各頂点を結び、 OA 、 OB 、 OC 同じ比に内分または外分点をそれぞれ A' 、 B' 、 C' とする。このとき $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ とが相似であることは容易に証明できる。 図: 上の説明図 2つ

この場合の $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ のように二つの図形の間

- (1) 対応する三点を結ぶ直線はすべて同一の点を通る。
- (2) その点から対応する三店までの距離の比は全て等しい。

という関係があるとき、その二つの図形は **相似の位置** にあるといい、対応店を結ぶ直線が集まる点を **相似の中心** という。

定理 26 相似の位置にある二つの多角形は相似である。逆に二つの相似多角形は相似の位置におくことができる。

(証明) 前半の証明は容易であるから逆の方を証明しよう。何角形でも証明は同じであるから、四角形の場合について試みる。

四角形 $ABCD$ と $A'B'C'D'$ とは相似であるとし、その相似比を $m : n$ とする。

任意の一点 O をとり、 O と A 、 B 、 C 、 D のおのおのを結ぶ。

OA 、 OB 、 OC 、 OD またはその延長上に

$$\frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1} = \frac{OC}{OC_1} = \frac{OD}{OD_1} = m : n \quad \text{図: 上の説明図}$$

となるように点 A_1 、 B_1 、 C_1 、 D_1 をとれば、四角形 $ABCD$ と 四角形 $A_1B_1C_1D_1$ とは相似の位置にあるから、定理の前半に基づいて

四角形 $ABCD$ (相似) 四角形 $A_1B_1C_1D_1$ (相似比 $m : n$)

よって 四角形 $A'B'C'D'$ \equiv 四角形 $A_1B_1C_1D_1$

ゆえに四角形 $A'B'C'D'$ は四角形 $A_1B_1C_1D_1$ に重ねることによって、
四角形 $ABCD$ と相似の位置に置くことができる。 □

問 2.3.2.8 $\triangle ABC$ の三辺 BC 、 CA 、 AB の中点を A' 、 B' 、 C' とすれば、 $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ とは相似の位置にある。

問 2.3.2.9 右の図は、 $\triangle ABC$ の辺 BC 上に一辺 QR を持ち、 AB 、 AC 上に頂点 P 、 S がある正方形 $PQRS$ の作図を示したものである。この方法を説明せよ。 図: 右の図

注意 相似の位置にある二つの多角形は相似であるし、逆に相似な多角形は相似の位置に置くことができるのであるから、相似多角形とは相似の位置に置くことのできる多角形であると定義してもよい。不規則な平面図形においては、相似の位置に置くことのできる二つの図形は相似であると定義する。

参考 図形を一定の割合で縮小したり拡大したりするのに使われるパンタグラフという動議がある。パンタグラフは図のようなもので A 、 B 、 C 、 D のところは自由に回転できるようにしてあって、 $AB = CD$ 、 $AD = BC$ である。 図: 写真と説明図

たとえば図形 α を1倍半に拡大したいときは次のようにする。

$$AF = \frac{2}{5}BP, \quad AO = \frac{2}{5}BQ$$

となるように O と P とを定め、 O を固定しておいて P を図形 α の上をたどる。そうすると Q は α を1倍半に拡大した図形 β を描く。

問 2.3.2.10 パンタグラフを上で説明したように用いて、図形 α から図形 β を獲るとき、 α と β とは相似の位置にあることを明らかにせよ。

練習問題 [6]

練習問題 6.1 $\triangle ABC$ の辺 BC に平行な直線が辺 AB 、 AC と交わる点をそれぞれ D 、 E とし、 D から BE に平行に引いた直線が辺 AC と交わる点を F とすれば $AE^2 = AE \cdot AF$ となる。 図: 上の説明図

練習問題 6.2 $\triangle ABC$ の中線を AM とし、 BC に平行に引いた直線が、 AB 、 AC 、 AM と交わる点をそれぞれ D 、 E 、 N とすると、 N は DE の中点である。 図: 上の説明図

練習問題 6.3 平行な直線 a 、 b 、 c に直線 g が交わる点を A 、 B 、 C とし、他の直線 g' が交わる点を A' 、 B' 、 C' ととすれば

$$AB : BC = A'B' : B'C'$$

である。 図: 上の説明図

練習問題 6.4 頂角の等しい二つの二等辺三角形は相似である。

練習問題 6.5 相似な多角形の面積の比は、相似の比の平方に等しい。これを五角形について証明せよ。

練習問題 6.6 $\triangle ABC$ の重心 G を通り、辺 BC に平行な直線が、辺 AB および AC と交わる点をそれぞれ E 、 F とするとき、 $\triangle ABC$ と台形 $EBCF$ との面積の比を求めよ。

総合問題 II

----- A -----

総合問題 2.A.1 四角形の一つの対角線が他の対角線によって二等分されるならば、あとの対角線によって四角形の面積も二等分される。

総合問題 2.A.2 直角三角形において、直角をはさむ二辺の長さを a 、 b 直角頂から斜辺に引いた垂線の長さを h とすれば

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \text{ である。}$$

総合問題 2.A.3 四角形の一組の対辺の中点を結ぶ線分がこの面積を二等分すれば、この四角形は台形である。

総合問題 2.A.4 線分 AB を $m : n$ に内分する点を C とし、 A 、 B 、 C を通る平行線 AA' 、 BB' 、 CC' を引く。任意の直線が AA' 、 BB' 、 CC' と交わる点をそれぞれ X 、 Y 、 Z とし $AX = x$ 、 $BY = y$ 、 $CZ = z$ とおけば次の関係が成り立つ。

図: 上の説明図

$$z = \frac{nx + my}{m + n}$$

総合問題 2.A.5 $\triangle ABC$ の辺 BC の延長上に BC に等しく CD をとり、 AC の中点 E と D 戸を通る直線が辺 AB と交わる点を F とするとき $DE : EF$ の値をもとめよ。

図: 上の説明図

総合問題 2.A.6 $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ とにおいて

$$AB \parallel A'B', \quad BC \parallel B'C', \quad AC \parallel A'C'$$

ならば $\triangle ABC$ (相似) $\triangle A'B'C'$ である。

--- B ---

総合問題 2.B.1 図のような長方形の形をした ABCD を、AP を折り目にして折ったとき、B が辺 CD の中点 E と重なった。BP:PC の値を求めよ。 図: 上の問題図

総合問題 2.B.2 $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ とにおいて

$$\angle C = \angle C', \quad \frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$$

であるならば $\triangle ABC$ (相似) $\triangle A'B'C'$ である。

総合問題 2.B.3 三角形の重心を通る直線に、その同じ側にある二つの頂点から引いた垂線の、長さの和は、他の頂点から引いた垂線の長さに等しい。 図: 上の説明図

総合問題 2.B.4 $\triangle ABC$ の三頂点 A、B、C および重心 G から、この三角形に交わらない任意の直線に引いた垂線の長さを a 、 b 、 c および g とすれば $3g = a + b + c$ である。 図: 上の説明図

総合問題 2.B.5 三角形の一つの頂点から対辺に引いた垂線が、その三角形を相似な二つの三角形に分けるときの、もとの三角形はどんな三角形か。

総合問題 2.B.6 平行四辺形 ABCD の頂点 A を通る直線が辺 BC と E で、また辺 DC の延長と F で交わるならば

$$\triangle CDE = \triangle BEF$$

である。 図: 上の説明図

総合問題 2.B.7 $\triangle ABC$ の頂点 A から辺 BC に引いた垂線が辺 BC と交わる点を D とするとき

$$AD^2 = BD \cdot DC$$

であるならば

$$\angle BAC = 90^\circ$$

である。

図: 上の説明図

補充問題 [2]

補充問題 2.1 $\triangle ABC$ の外側に正方形 $ABDE$ 、 $ACFG$ をつくるとき

$$CE = BG \quad CE \perp BG$$

である。

図: 上の説明図

補充問題 2.2 $\triangle ABC$ において $\angle B = 2\angle C$ 、 A から BC に引いた垂線の足を D 、 BC の中点を M とすれば

$$AB = 2DM$$

である。

図: 上のヒント図

補充問題 2.3 上の (1) 図において、甲の畑と乙の畑との境にある小道 ABC を直線の道に直して、 A から本道に出るようにしたい。甲と乙との面積を変えないようにするには、道をどのように作ればよいか。また小道が (2) 図のように $ABCD$ となっている場合はどうすればよいか。

図: 上の問題図

補充問題 2.4 $\triangle ABC$ の辺 BC 上の任意の点を P とし、 B と C から AP に平行に引いた直線が AC 、 AB の延長と交わる点を Q 、 R とすれば

$$\frac{AP}{BQ} + \frac{AP}{CR} = 1$$

となる。

図: 上の説明図

補充問題 2.5 $\triangle ABC$ の辺 BC に平行な直線が AB 、 AC と交わる点を D 、 E とし、 CD と BE との交点を O とすれば AO は BC の中点を通る。

補充問題 2.6 三つの平行線 g 、 g' 、 g'' がこの順にある。 g と g' との距

離を a 、 g' と g'' との距離を b とするとき、各直線上に頂点を置く正三角形 ABC の一辺の長さを a 、 b を用いて表せ。 図: 上の説明図

補充問題 2.7 四角形 $ABCD$ の対角線 AC 、 BD の中点をそれぞれ M 、 N とすれば、次の式が成り立つ。

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN \quad \text{図: 上のヒント図}$$

補充問題 2.8 直角三角形 ABC の直角頂 A から斜辺 BC に垂線 AP を引き、 P から二辺 AB 、 AC にそれぞれ垂線 PE 、 PF を引けば、

$$\frac{BE}{CF} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \quad \text{図: 上の説明図}$$

補充問題 2.9 一直線 g が $\triangle ABC$ の三辺 BC 、 CA 、 AB またはその延長と交わる点を、それぞれ P 、 Q 、 R とすれば

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

である。(メネラウスの定理) 図: 上のヒント図

この定理の逆は正しいか。 図: 逆のヒント図と三辺の延長上で交わる図

(脚注) メネラウス (Menelaus) 紀元前 100 年頃アレクサンドリアにいた数学者で、球面上の幾何学の研究者として知られている。球面上の三角形の合同の定理、三つの角の和は二直角より大きいことを証明した。

補充問題 2.10 一点 O と $\triangle ABC$ の頂点 A 、 B 、 C とを通る直線がそれぞれの辺 BC 、 CA 、 AB またはその延長と交わる点を P 、 Q 、 R とすれば

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

である。(チェバの定理)

図: 上の説明図

この定理の逆は正しいか・

(本文注意) 三つの比 $\frac{BP}{PC}$ 、 $\frac{CQ}{QA}$ 、 $\frac{AR}{RB}$ と $\triangle OBC$ 、 $\triangle OCA$ 、 $\triangle OAB$

の面積の比で表して見よ。