講義ノートの周辺

Part I 高等学校数学I幾何

3. 円の性質

森 隆一

$\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\epsilon\,(\varepsilon)\,\zeta\,\eta\,\theta\,(\vartheta)\,\iota\,\kappa\,\lambda\,\mu\,\nu\,\xi\,o\,\pi\,(\varpi)\,\rho\,(\varrho)\,\sigma\,\varsigma\,\tau\,\upsilon\,\phi\,(\varphi)\,\chi\,\psi\,\omega$

$\Gamma\,\Delta\,\Theta\,\Lambda\,\Xi\,\Pi\,\Sigma\,\Upsilon\,\Phi\,\Psi\,\Omega$

$\mathcal{A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\,M\,N\,O\,P\,Q\,R\,S\,T\,U\,V\,W\,X\,Y\,Z}$

$\mathfrak{A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\,M\,N\,O\,P\,Q\,R\,S\,T\,U\,V\,W\,X\,Y\,Z}$

$\mathfrak{a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h\,i\,j\,k\,l\,m\,n\,o\,p\,q\,r\,s\,u\,v\,w\,x\,y\,z}$

$\mathbb{A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\,M\,N\,O\,P\,Q\,R\,S\,T\,U\,V\,W\,X\,Y\,Z}$

目 次

第3章　円の性質 79
3.1 円と直線 79
3.1.1 弦と弧と中心角 79
3.1.2 割線と接戦 83
3.1.3 二つの円 88
3.2 円周角 93
3.2.1 円周角 93
3.2.2 円と四角形 98
3.2.3 円と比例 101
3.3 円の周と面積 107
3.3.1 円の周 107
3.3.2 円の面積 110
3.3.3 弧度法 113

第3章　円の性質

パスカル　Pasucal (1623 ～ 1662)　フランスの数学者。幾何に対する彼の天分は13歳の時に現れ、14際してすでに円錐曲線っ関する論文を書いた。晩年宗教に親しみ、僧院に入りパスカルの「瞑想録」で知られる気高い作品を残した。

パスカルの写真

3.1　円と直線

3.1.1　弦と弧と中心角

演習場の2点を結ぶ線分を**弦**という。

円 O の弦を AB とし、O, A および O, B を結べば、△OAB は二等辺三角形であらるから、二等辺三角形の性質より、容易に次の定理が導かれる。

定理 27　円の中心から弦に引いた垂線は源を二等分する。　(説明図)

系 27.1　円の中心と玄の中点を結ぶ線分は弦に垂直である。

$\boxed{\text{森記}}$ ・・・その弦と直行する

系 27.2　弦の垂直二等分線は中心を通る。 説明図

問 3.1.1.1　同じ点を中心とするいくつかの円を同心円という。一つの直線が二つの同心円と交わる点を A, B, C, D とすれば AB = CD である。

定理 28　同円または等円において、中心から等しい距離にある弦は等しい。 説明図

$\boxed{\text{森記}}$ 弦は等しい → 弦の長さは等しい

(証明)　等円の中心を O, O′ とし、中心から弦 AB, A′B′ に引いた垂線を OH, O′H′ とすれば、H, H′ はそれぞれ AB, A′B′ の中点である。よって

$$\mathrm{OA} = \mathrm{O'A'} = r\text{、}\mathrm{OH} = \mathrm{O'H'} = h$$ 説明図

とおけば、ピタゴラスの定理によって

$$\mathrm{AH} = \sqrt{r^2 - h^2}\text{、}\quad \mathrm{A'H'} = \sqrt{r^2 - h^2}$$

ゆえに　$\mathrm{AH} = \mathrm{A'H'}$　**よって**　$\mathrm{AH} = \mathrm{A'H'}$ □

定理 28 の逆もまた正しい。すなわち

系 28.1　同円または等円において、等しい弦は中心から等しい距離にある。

問 3.1.1.2　上の系を証明せよ。

問 3.1.1.3　一つの円において、等しい弦 AB、CD の中心をそれぞれ M、N とし、M と N とを通る弦を PQ とすれば PM = QN である。

円周の一部分を弧という。両端が二点 A、B である弧を、弧 AB、または、(AB) と書き表す。円周の半分に等しい弧を半円といい、半円より大きい弧を優弧、半円より小さい弧を劣弧という。

森記　弧の記号は AB の上に '(' を横にして置いたものを用いる。

問 3.1.1.4　円 O の周上の点 P を、直系の両端 A、B と結べば、∠APB = 90° である。逆に、△APB で ∠PB = 90° ならば AB を直径とする円は P をとおる。

(古代ローマの水道のアーチ橋の写真)

森記　この性質は定理としている本も多いのではないか。定理とするためには、逆の部分をキチンと逆命題とすることが必要である。

円の二つの半径の作る角を中心角という。円 O の周を二点 A、B によって二つに分け、中心角 AOB の内にある弧を AB としたとき、弧 AB を中心角 AOB に対する弧といい、中心角 AOB を 弧 AB に対する中心角という。

なお 弧 AB よ二つの半径 OA、OB とからできている図形を弧という。

合同な円に二つの等しい中心核 AOB、A′O′B′ を作れば、弧 AB を 弧 A′B′ に重ねることができる。したがって次の定理が得られる。　(説明図)

定理 29　同円または等円において、等しい中心角に対する弧は合同であ

る。この逆もまた正しい。

この定理によって、同円 (または等円) では、中心角が 2 倍、3 倍 …… となるにしたがって、弧の長さもまた 2 倍、3 倍 …… となることがわかる。また中心角が $\frac{3}{2}$ 倍になれば弧もまた $\frac{3}{2}$ 倍になる。それで一般に弧の長さは中心角に比例することがわかる。 (説明図)

森記 上の段の内容は弧の長さに関するもので、著者の工夫のしどころである。曲線の長さを '数学' としてキッチリ扱うのは数学科の学部レヴェルと思われる。一方、三角関数のためには弧度法が必要となる。角度の大きさを対応する弦の長さで代用するもので、上の考察はこの代用が可能であることを示している。

系 29.1 **同円または等円において、中心角とそれに対する弧とは比例する。**

これを不等関係として見れば、次の系が得られる。

系 29.2 **同円または等円において、大きい中心角に対する弧は、小さい中心角に対する弧よりも大きい。この逆もまた正しい。**

問 3.1.1.5 **同円または等円で、等しい弧に対する弦は等しい。この逆もまた正しい。**

問 *3.1.1.6* **同円または等円で、等しい中心角に対する弦は等しい。**

(説明図)

問 *3.1.1.7* **同円または等円において、弦とこれに対する弧とは比例するか。**

3.1.2　割線と接戦

同じ平面上にある円と直線の位置関係は次の三つの場合に分けられる。

(i)　二点で出あうとき (交わる)

(ii)　一点で出あうとき

(iii)　出あわないとき　(説明図)

第二の倍には、円と直線は**直線は接する**といい、出あう点を**接点**、この直線を**接線**という。また円と (2 点で) 交わる直線を**割線**という。

円と直線との位置関係は、円の中心から直線までの半径との大小関係よって距離と定まる。これについて次の定理がある。

定理 30　円の半径を r、中心と直線との距離を d とすると

(i)　$d > r$ のとき、直線と円とは出あわない。

(ii)　$d = r$ のとき、直線と円とは接する。

(iii)　$d < r$ のとき、直線と円とは交わる。

(証明)　円の中心を O、直線を XY、O から XY に引いた垂線の足を H とする。

(i)　$D > r$ のとき

XY 上の任意の点を P とすれば

$$\mathrm{OP} \geqq \mathrm{OH} \qquad \text{ゆえに} \qquad \mathrm{OP} \geqq d$$

よって　$$\mathrm{OP} > r$$　(説明図)

したがって XY 上の点はすべて円の外にあるから、XY と円とは出あわない。

(ii)　$d = r$ **のとき**

$\mathrm{OH} = d = r$ **となるから** H **は円周上にある。**

XY **上にあって** H **と異なる点を** P **とすれば**

$$\mathrm{OP} > \mathrm{OH} \qquad \text{ゆえに} \qquad \mathrm{OP} > r$$

したがって、P **は円の外にある。すなわち** XY **が円** O **とは一点** H **だけで出あうから、円** O **と点** H **で接する。**

(ii)　$d = r$ **のとき**

XY **上に** H **の両側に** $\sqrt{r^2 - d^2}$ **に等しく** HA、HB **をとれば**

$$\mathrm{OA}^2 = \mathrm{OA}^2 = d^2 + (\sqrt{r^2 - d^2})^2 = r^2$$

ゆえに　$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = r$

となるので、A **と** B **は円** O **上にある。**

また、線分 AB **上の点** (A、B **を除く**) **を** P**、線分** AB **の延長上の点を** Q **とすれば**

$$\mathrm{OP} < r \quad \mathrm{OQ} > r$$

となるので、P **と** Q **とはともに円周上にはない。したがって** XY **は二点** A、B **で円** O **と交わる。** □

森記　定理の証明は、$d > r \to$ 交わらない、$d = r \to$ 接する、$d < r \to$ 2点で交わる、を示した。d と r の関する3つの条件はどれか1つが必ず成り立つという性質をもつ。円と直線の3つの結論も同様である。このような場合は、それぞれの逆も簡単に証明できる。

例えば、2点で交わる、とする。$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{r}$ ならば円と直線は接することになり、これは成立しない。$\boldsymbol{d} > \boldsymbol{r}$ ならば円と直線は交わらず、これも成立しない。したがって、$\boldsymbol{d} < \boldsymbol{r}$ が成り立つ。

系 30.1　円の半径の端において、これに垂直な直線は接線である。

系 30.2　円の接線は接点における半径に垂直である。

(証明)　中心 O の円上の点 A で、この円に接する直線を XY とする。もし OA と XY が垂直でないとすると、O から XY に垂線 OH を引けば、H は A と異なるので

$$\mathrm{OA} > \mathrm{OH}$$

よって $$r > \mathrm{OH}$$ (説明図)

ゆえに 定理 30 の (iii) によって、円 O と XY は交わる。これは仮定に反するので、OA と XY は垂直である。

問 3.1.2.1　円外の点 P から円 O に引いた接線の接点を A、B とすれば

1)　PA = PB

2)　∠APO = ∠BPO

である。 (説明図)

上の図の線分 PA、PB の長さを、点 P から円 O に引いた接線の長さという。

問 3.1.2.2　右の器具は、円盤の中信を見つけるために考案されたものである。この構造を説明せよ。 (板を矢印状に組んだ機具のスケッチ)

問 3.1.2.3 **定円の定長の弦は一つの円に接する。定円の半径を r、定長の弦の長さを A として、この円の半径を求めよ。** (説明図)

問 3.1.2.4 **半径 6cm の円の中心 O から 10cm 離れた所に点 P がある。P からこの円に引いた接線の長さを求めよ。**

作図題 8 **中心 O 円外の点 P から、この円に接線を引け。** (説明図)

(作図) **線分 PO の中点 M を求め、M を中心に MO を半径とする円を書いて、円 O との交点を A、B とし、点 P と A、B とを結ぶ。**

(証明) **A、B は PO を直径とする円周上の点であるから**

$$\angle \mathrm{PAO} = \angle \mathrm{PBO} = 90^\circ$$

ゆえに PA、PB は円 O に接する。 □

問 3.1.2.5 **中心 O 円外の点 P から、この円に割線を引き、弦の部分の長さが与えられた長さとなるようにせよ。**

多角形の全ての頂点が一つの円周上にあるとき、多角形は円に内接するといい、この多角形を内接多角形という。またこの円は多角形に外接するといい、この円を外接円という。

多角形のすべての辺が一つの円に接するときは、多角形は円に概説するといい、この多角形を概説多角形という。またこの円は多角形に内接するといい、この円を内接円という。

次に三角形の外接円・内接円の中心となる特殊な点について調べてみよう。

定理 31　**三角形の三つの辺の垂直二等分線は一点で交わる。**

(証明)　**$\triangle$ABC の辺 AB、AC の垂直二等分線の交点を O とすれば**

よって　O は BC の垂直二等分線上にある。すなわち三辺 AB、AC、BC の垂直二等分線は O で交わる。 $\Box$

三角形の三つの辺の垂直二等分線の交点はこの三角形の外接円の中心に当たる。この点を三角形の外心といい、普通 O で表す。

問 3.1.2.6　**一辺の長さが a の正三角形の外接円の半径を求めよ。**

問 3.1.2.7　**与えられた三角形に外接円を書け。**

定理 32　**三角形の三つの角の二等分線は一点で交わる。**

(証明)　**$\triangle$ABC の $\angle$B と $\angle$C の二等分線の交点を I とし、I から辺 BC、CA、AB にそれぞれ垂線 ID、IE、IF を引けば**

$$\mathrm{IF} = \mathrm{ID} \qquad \mathrm{ID} = \mathrm{IE}$$

ゆえに $$\mathrm{IF} = \mathrm{IE}$$ (説明図)

よって I は $\angle$A の二等分線になる。すなわち $\angle$A、$\angle$B と $\angle$C の二等分線は一点 I で交わる。 $\Box$

三角形の三つの角の二等分線の交点は、この三角形の内接円の中心に当たる。この点を三角形の内心といい、普通 I で表す。

系 32.1　**三角の一つの内角と他の二つの外角の二等分線は一点で交わる。**

この点は三角形の一辺と、他の二辺の延長とに接する円の中心である。この円を傍接円といい、その中心を傍心という。傍心は三つある。(説明図)

問 3.1.2.8　**与えられた三角形の内接円と傍接円を書け。**

問 3.1.2.9　**△ABC の 内接円が BC、CA、AB に接する点を D、E、F とすれば** (説明図)

$$\mathrm{AE} = \mathrm{AF} = p - a、\mathrm{BF} = \mathrm{BD} = p - b、\mathrm{CD} = \mathrm{CE} = p - c$$

である。ただし a、b、c は辺 BC、CA、AB の長さで $2p = a + b + c$ である。

問 3.1.2.10　**直角三角形があって、その直角をはさむ二辺の長さは 3cm と 4cm とである。この三角形の内接円の半径を求めよ。**

問 3.1.2.11　**△ABC の角 A 内の傍接円が辺 BC、および辺 AC、AB の延長と接する点を、それぞれ D′、E′、F′ とすれば**

$$\mathrm{AE}' = \mathrm{AF}' = p、\mathrm{BF}' = \mathrm{BD}' = p - a、\mathrm{CD}' = \mathrm{CE}' = p - b$$

である。ただし、a、b、c、p は問 9 と同じ。

3.1.3　二つの円

二つの円の位置関係には、次の図に示す五つの場合がある。二つの円が一点で出あうときは接するといい、出あう点を接点という。接する場合に、接点以外の部分が互いに外にあるときに外接するといい、一方が他方の内部にあるときに外接するといって区別する。 (説明図: 5 個の位置図)

問 3.1.3.1　**二つの円 O、O′ が二点 A、B で交わるとき、この二つの円の中心を通る直線は、共通な弦 AB を垂直に二等分する。**

定理 33　二つの円が接するとき、接点は二円の中心を通る直線上にある。逆に中心を通る直線上の一点を共有する二つの円は接する。

(証明)　もし二円 O、O′ の接点 P が中心を結ぶ直線 OO′ 上にないとすると、OO′ に関して P と対称の位置にある点を P′ とすれば

$$\mathrm{OP'} = \mathrm{OP} \qquad \mathrm{O'P'} = \mathrm{O'P}$$

となるので、P′ もまた二円の共有点となり、二円は二点 P、P′ で交わることになる。これは二円が接するという条件に反する。ゆえに接点は中心を通る直線上にある。

逆の証明は各自試みよ。 □

二円の位置関係を、その半径と、中心間の距離によって分類すれば、次の定理が得られる。

定理 34　二円の半径を r、r' $(r > r')$、中心間の距離を d とすれば

(i)	互いに外にあれば	$d > r + r'$
(ii)	外接すれば	$d = r + r'$
(iii)	交われば	$r - r' < d < r + r'$
(iv)	内接すれば	$d = r - r'$
(v)	一方が他方を含めば	$d < r - r'$

(説明図: 5 個の位置図)

問 3.1.3.2　定理 34 を証明せよ。

背理法によって、上の定理の逆はすべて正しいことがわかる。

系 34.1　二円の半径を r、r' $(r > r')$、中心間の距離を d とすれば

(i)	$d > r + r'$ **のとき、**	**二円は互いに外にある**
(ii)	$d = r + r'$ **のとき、**	**二円は外接する**
(iii)	$r - r' < d < r + r'$ **のとき、**	**二円は交わる**
(iv)	$d = r - r'$ **のとき、**	**二円は内接する**
(v)	$d < r - r'$ **のとき、**	**一方が他方を含む**

問 3.1.3.3　半径 8cm および 5cm の二円の中心間の距離が次の長さのとき、二円の相互の位置関係はどうなっているのか。

1)　3cm	2)　10cm	3)　2cm
4)　5cm	5)　13cm	6)　15cm

問 3.1.3.4　二つの等円の位置関係を、半径 r と中心間の距離 d との関係により分けよ。

(地球・月・太陽のイラストグラフィック)

二つの円の両方に接する直線を共通接線という。共通接線はもし二円が接線の同じ側にあれば共通外接線、反対側にあれば共通内接線という。(説明図)

問 3.1.3.5　二円が接するとき、その接点で一つの円に接する直線は他方にも接する。

問 3.1.3.6　半径 3cm と 5cm の二円の中心間の距離が 10cm のとき、この二円の共通接線の長さを求めよ。

問 3.1.3.7　半径が R、r $(R \geqq r)$ の二円の中心間の距離を d とすれば

共通外接線の長さは： $\ell = \sqrt{d^2 - (R-r)^2}$

共通内接線の長さは： $\ell' = \sqrt{d^2 - (R+r)^2}$

練習問題 [7]

練習問題 7.1　円の半径を r、一つの弦の長さを x、中心との距離を y とすれば、x、Y、r の間にどんな関係が成り立つか。 (説明図)

練習問題 7.2　前問の結果を使って、次ことを明らかにせよ。「同円または等円において、中心を通る弦すなわち直径が最も大きく、中心からの距離が増すにつれて弦は小さくなる。」

練習問題 7.3　二つの等円 O、O′ で、2 直角より小さい 中心角 AOB が中心角 A′O′B′ の 2 倍ならば、弦 B は 弦 A′B′ の 2 倍より小さい。

練習問題 7.4　二円の種々の位置について共通接線の数を調べよ。

練習問題 7.5　点 P で外接する二円 O、O′ の共通外接線接点を A、B とすれば、P における共通内接線は 線分 AB を二等分する。 (説明図)

練習問題 7.6　前問の ∠APB は直角である。

練習問題 7.7　△ABC の内接円と 角 A 内の傍接円とが 辺 BC と接する点をそれぞれ D、D′ とし、辺 AB およびその延長に接する点を F、F′ ととすれば、DD′ $= b - c$、FF′ $= a$ となる。 (説明図)

練習問題 7.8　与えられた円に接し、与えられた点を通る半径 r の円を書け。

練習問題 7.9　直角の二辺に接する半径 a の円がある。この円に接し、かつ初めの二直線に接する円 (二つある) の半径を求めよ。 (説明図)

3.2 円周角

3.2.1 円周角

円周上の一点から引いたふたつの弦の作る角を**円周角**という。円周角 APB の中にある 弧 AB を 円周角 APB に対する弧といい、この 円周角 APB を 弧 AB に対する円周角という。 (説明図)

$\boxed{\text{注意}}$ 弧 AB に対する円周角を、**弧 AB の上に立つ円周角**ともいう。

定理 35 一つの弧に対する円周角は、同じ弧に対する中心角の半分に等しい。

(証明) 弧 AB に対する円周角を APB、中心角を AOB とすると P の位置によって、次の三つの場合が起る。 (説明図: 次の 3 つの場合)

(i) O が ∠APB の辺上にあるとき

たとえば O が AP 上にあるとする。

$$\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{OPB} + \angle \mathrm{OBP}$$

しかるに OP = OB であるから

$$\angle \mathrm{OPB} = \angle \mathrm{OBP}$$

ゆえに $\angle \mathrm{AOB} = 2\angle \mathrm{OPB}$

よって $\angle \mathrm{APB} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{AOB}$

(ii) O が ∠APB 内にあるとき、および、(iii) O が ∠APB の外にあるとき、の証明は各自試みよ。 (説明図: 次の 3 つの場合) □

問 3.2.1.1 右の図でかくのおおきさ x、y を求めよ。 (問題図)

問 3.2.1.2　紙の上に二本のピンを立て、三角定規の 30° の角の辺がこの二本のピンに触れるように動かせば、この角の頂点はどんな運動をするか。 (合成写真またはイラスト)

問 3.2.1.3　円周角が鈍角か、直角か、鋭角かに従って、その円周角に対する弧は、優弧か、半円か、劣弧かである。 (説明図)

系 35.1　同円または等円において、等しい円周角に対する弧は等しい。逆に同円または等円において等しい弧に対する円周角は等しい。

問 3.2.1.4　上の系を証明せよ。

問 3.2.1.5　平行な二つの弦で切り取られる弧のうち、弦の間にあるものは等しい。 (説明図)

問 3.2.1.6　定円上に二点 A、B がある。P が円周上を運動するとき、$\angle$APB の二等分線は定点を通る。また AP の延長を PQ とすれば $\angle$BPQ の二等分線あるいはその延長はどこを通るか。 (説明図)

一つの弧と、その両端を結ぶ弦とからなる図形を弓形という。弓形の弧の上の任意の点を弦の両端と結んで得られる円周角は一定である。この角を弓形の含む角または弓形の角という。

問 3.2.1.7　AB を弦とする弓形野含角を α、AB に関し弓形と同じ側にある点を P とすれば

(i)　**P が弓形の内部にあれば**　$\angle \mathrm{APB} > \alpha$

(ii)　P が弓形の弧上あれば　　$\angle APB = \alpha$

(ii)　P が弓形の外部にあれば　　$\angle APB < \alpha$

である。この逆もまた正しい。 (ヒント図)

問 3.2.1.8　二つの低点 A、B がある。$\triangle PAB$ が鋭角三角形であるためには、P はどんな範囲になければいけないか

問 3.2.1.9　円周角を用いると、船は暗礁を避けることができる。右の図で船が危険区域にあるかどうかを知るにはどうすればよいか。

(問題図: 陸地上の 2 点 A,B とこれを通る円、弧 AB の円周角)

接線と接点を通る直径とが直交することは先に学んだ。ここでは接点を通る任意の弦と接線との関係を、角の方から調べてみよう。

定理 36　円の接線とその接点を通る弦との作る角は、その角外の弓形の含む角に等しい。

(証明)　接線を AT、接点を A、弦を AB、$\angle BAT$ 外の弓形の弧上の点を P とする。直径 AC を引き、B と C とを結べば

(i)　$\angle BAT < 90^\circ$ のとき、図のように角の大きさを表すと

(説明図: $\angle BAT = \alpha$、$\angle APB = \beta$、$\angle ACB = \gamma$、$\angle BAC = \delta$)

$$\alpha + \delta = 90^\circ \qquad \gamma + \delta = 90^\circ$$

ゆえに　　$\alpha = \gamma$

しかるに　　$\beta = \gamma$

よって　　$\alpha = \beta$

(ii) $\angle\mathrm{BAT} = 90°$ のとき、および (iii) $\angle\mathrm{BAT} > 90°$ のときは各自試みよ。 □

問 3.2.1.10 右の図で AT は $\angle$ABC の外接円の接線である。角 x、y の大きさを求めよ。

$\angle$ABC とその外接円、および、A で接する外接円の接線が書かれている

図 1: $\angle\mathrm{B} = 50°$、$\angle\mathrm{C} = 60°$ $\boldsymbol{x}$ は AB と接線のなす角、$\boldsymbol{y}$ は AC と接線のなす角

図 2: $\angle\mathrm{A} = 74°$、$\angle$B を $\boldsymbol{y}$、$\angle$C を $\boldsymbol{x}$ 60°、AB と接線のなす角は 45°

問 3.2.1.11 円の弦 AB に平行な接線 CT の接点を C とすれば、C は弧 AB の中点である。

問 3.2.1.12 円の弦 AB の端 A における接線を AT よするとき、$\angle$BAT の二等分線は 弧 AB の中点を通る。

系 36.1 円の弦とその一端を通る直線との作る角が、その角の外部にある弓形の角に等しいならば、その直線はこの円の接線である。

(証明) 次の図で (説明図: 弦 AB と直線 AT、円周上に P)

$$\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{BAT}$$

とする。A における接線を AT′ とすれば、定理 36 によって

$$\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{BAT'}$$

ゆえに $$\angle\mathrm{BAT} = \angle\mathrm{BAT'}$$

よって AT と AT′ とは一致するから、AT は A における接線となる。

例 3.2.1.1　二等辺三角形ABC の頂点 A を通る直線が 辺BC と交わる点を D、外接円と交わる点を E とすれば、 $\triangle$BDE の外接円は AB に接する。

(証明)　$\triangle$ABC において AB $=$ AC であるから(とすると)

$$\angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{ACB}$$

$\angle$ACB と $\angle$AEB とは 弧AB の上に立つ円周角であるから

$$\angle \mathrm{ACB} = \angle \mathrm{AEB}$$

ゆえに

$$\angle \mathrm{AB} = \angle \mathrm{AEB}$$

よって AB は $\triangle$BDE の外接円に接する。 □

問 3.2.1.13　AD と BC が平行な 台形ABCD の対角線の交点を O とする。円BOC の O における接線を OT とすれば、OT は 円AOD にも接する。

作図題 9　与えられた 線分AB を弦とし、与えられら 角 α を含む弓形の弧を作ること。

(作図)　AB を一辺として、与えられら 角 α に等しい 角BAT を作り、A から AT に引いた垂線と AB の垂直二等分線との交点を O とする。O を中心に、OA を半径とする円を作れば、この円のうちで $\angle$BAT の内部にない部分が求める弧である。

(証明)　AT は 半径OA に垂直であるから、円O に接する。ゆえに 弧AB 上の任意の点を P とすると

$$\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{BAT} = \alpha$$

ゆえに 弧 AB は求めるものである。 □

問 3.2.1.14 長さ 3cm の線分を弦とし、60° の角を含む弓形の弧を作れ。

問 3.2.1.15 長さ 6m の線分を弦とし、150° の角を含む弓形の弧を作れ。

問 3.2.1.16 船 P から燈台 A、B および B、C を見込む角 ∠APB、∠BPC を測ったらそれぞれ 73°、56° であった。船の位置を求める方法を説明せよ。 (説明図: 地図に A、B、C)

3.2.2 円と四角形

三角形は恒に内接するが、四角形は必ずしも円に内接しない。したがって四角形が円に内接するためには、ある条件が備わっていなければならない。

定理 37 円に内接する四角形の対角は補角をなす。

(証明) 四角形 ABCD は中心 O の円に内接するものとする。半径 OB、OD を作り、弧 BCD に対する中心角の大きさを α、弧 BAD に対する中心角の大きさを β とすれば (説明図)

$$\angle A = \frac{1}{2}\alpha \qquad \angle C = \frac{1}{2}\beta$$

ゆえに、

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \times 4\angle R = 2\angle R$$

同様にして $\angle B + \angle D = 2\angle R$ □

問 3.2.2.1　**右の図で角の大きさ x、y を求めよ。**

(問題図: 図 1; $\angle A = 60°$、$\angle B = 74°$、$\angle C = \boldsymbol{x}$、$\angle D = \boldsymbol{y}$)

(図 2; $\angle A$ の外角 $= \boldsymbol{x}$、$\angle B = \boldsymbol{y}$、$\angle C = 115°$、$\angle D$ の外角 $= 80°$)

問 3.2.2.2　**円に内接する平行四辺形はどんな形か。**

問 3.2.2.3　**円に内接する台形はどんな形か。**

系 37.1　**四角形の対角が補角をなせば、この四角形は円に内接する。**

(証明)　四角形 ABCD **で**

$$\angle A + \angle C = 2\angle R \qquad (1)$$

とする。三点 A、B、D **を通る円を作り、弧** BD (A **を含まない方) 上の任意の点を** C′ **とすれば、四角形** ABC′D **は円に内接するから**

$$\angle A + \angle C' = 2\angle R \qquad (2)$$

ゆえに C **は 弧** BC′D **上にある。すなわち 四角形** ABCD **は円に内接する。**

$\square$

四角形 ABCD **において、内角** A **を外角** C **の内対角という。**　(説明図)

系 37.2　**円に内接する四角形の外角はその内対角に等しい。またこの逆も正しい。**

例 3.2.2.1　**三角形の頂点から対辺またはその延長上に引いた三つの垂線は一点で交わる。**

(解)　$\triangle$ABC の頂点B、C から対辺に引いた垂線をそれぞれ BE、CF とし、その交点 H と A とを通る直線が辺 BC と交わる点を D とする。

$$\angle \mathrm{AEH} = \angle \mathrm{AFE} = 1\angle \mathrm{R}$$ (説明図)

であるから、E、F は AH を直径とする円周上にある。よって

$$\angle \mathrm{AHE} = \angle \mathrm{AFE} \qquad (1)$$

次に $\angle \mathrm{BEC} = \angle \mathrm{BFC} = 1\angle \mathrm{R}$

であるから、E、F は BC を直径とする円周上にある。したがって 四角形BFEC は円に内接するから

$$\angle \mathrm{AFE} = \angle \mathrm{ECD} \qquad (2)$$

(1) と (2) から　$\angle \mathrm{AHE} = \angle \mathrm{ECD}$

ゆえに 四角形CDHE は円に内接するので

$$\angle \mathrm{CDH} = \angle \mathrm{HEA} = 1\angle \mathrm{R}$$

すなわち AD $\perp$ BC、よって三つの垂線 AD、BE、CF は一点 H で交わる。 $\square$

三角形の各頂点から対辺に引いた三つの垂線交点を**垂心**といい、普通 H で表す。

問 3.2.2.4　$\triangle$ABC の各頂点から対辺に平行線を引いて $\triangle$A′ B′C′ を作れば、$\triangle$ABC の三つの垂線AD、BE、CF は $\triangle$A′B′C′ の三辺の垂直二等分線である。これを使って AD、BE、CF は一点で交わることを証明せよ。 (説明図)

問 3.2.2.5　二円 O、O′ が二点 P、Q で交わるとき P、Q を通る直線

APB、CQD が円 O と交わる点を A、C とし、円 O' と交わる点を B、D とすれば AC と BD は平行である。 (説明図)

> $\boxed{\text{森記}}$ A の定義の前に A を用いている。“P を通る直線が O と交わる点で P 以外のものを A とする” などが考えられる。さらに、P が O' の外か内かの場合がある。
> この章では、“したがって、○○なので△△が成り立つ” という文がよく用いられているが、これは分ける方がより丁寧と思う。

問 3.2.2.6 **△ABC で AD ⊥ BC、DE ⊥ AB、DF ⊥ CA とすると、四点 B、C、E、F は同じ円周上にある。**

問 3.2.2.7 **円に外接する四角形の二組の対辺の和は等しい。**

問 3.2.2.8 **円に外接する平行四辺形はどんな形か。**

3.2.3 円と比例

円 O に二つの弦 AB、CD を作れば、それらは弦上で交わるか、共に延長上で交わるか、または平行になるかのいずれかである。特に交わるときは交点を P とすると、四つの線分 PA、PB、PC、PD の間に次の関係がる。

定理 38 **円 O の二つの弦 AB、CD またはそ(れら)の延長が P で交わるならば、次の等式が成り立つ。**

$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$$

(証明)　A と D、B と C を結べば、$\triangle$PAD と $\triangle$PCB において

$$\angle \mathrm{PAD} = \angle \mathrm{PCB} \qquad \angle \mathrm{DPA} = \angle \mathrm{BPC}$$

ゆえに　$\triangle$PAD と $\triangle$PCB は相似　(説明図)

よって　$\mathrm{PA} : \mathrm{PB} = \mathrm{PC} : \mathrm{PD}$

ゆえに　$\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{PC} \cdot \mathrm{PD}$　□

問 3.2.3.1　$\triangle$ABC の各頂点から対辺またはその延長に引いた垂線を AD、BE、CF とし、垂心を H とすれば、次の関係がある。

$$\mathrm{AH} \cdot \mathrm{HD} = \mathrm{BH} \cdot \mathrm{HE} = \mathrm{CH} \cdot \mathrm{HF}$$

系 38.1　二つの線分 AB、CD の交点、または両方の延長の交点を P とするとき

$$\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{PC} \cdot \mathrm{PD}$$

ならば、四つの点 A、B、C、D は同じ円周上にある。

問 3.2.3.2　上の系を証明せよ。

問 3.2.3.3　二つの円 O、O′ の共通な弦またはその延長上の点 P を通る二つの直線 PAB、PDC を引いて、円 O との交点を A、B、円 O′ との交点を C、D とすれば、四つの点 A、B、C、D は同じ円周上にある。

(説明図)

森記　直線を 3 点で指定するのには違和感を抱く。

円外の一点 P から引いた割り線 PAB を接線 PT に限りなく近づけると、A と B とは T に限りなく近づくので　(説明図)

$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PA}'\cdot\mathrm{PB}'=\mathrm{PA}''\cdot\mathrm{PB}''=\cdots=\mathrm{PT}^2$$

となることが考えられる。

定理 39 **円外の一つの点 P から割線 PAB および接線 PT を引き、交点を A、B、接点を T とすれば** (説明図)

$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PT}^2$$

である。

(証明) 弦 TA、TB を引けば、△PAT と △PTB とにおいて

$$\angle\mathrm{PTA}=\angle\mathrm{PBT}$$

$\angle\mathrm{P}$ **は共通**

であるから

△PAT **と** △PTB **は相似**

ゆえに $\mathrm{PA}:\mathrm{PT}=\mathrm{PT}:\mathrm{PB}$

すなわち $\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PT}^2$ □

問 3.2.3.4 **二つの円 O、O′ が交わるとき、その共通弦 AB の延長上の点 P から、この二円に引いた接線の長さは等しい。** (説明図)

系 39.1 **二つの線分 PT、PA があって、B は 線分PA またはその延長上にあり、かつ**

$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PT}^2$$

であるならば、三点 A、B、T を通る円は T において PT に接する。

問 3.2.3.5　**上の系を証明せよ。**

a、b を正数とするとき、$x^2 = ab$ となる正数 x を a と b の比例中項という。

作図題 10　**a、b を与えられた二つの線分の長さとするとき、この比例中項を長さにもつ線分を作ること。** (説明図)

(作図)　長さ a の 線分 AB を作り、AB の園長上に b に等しく BC を取る。AC を直径とする円と、B から AC に垂直に引いた直線との交点を D とすれば 線分 BD は求めるものである。

(証明)　各自試みよ。

問 3.2.3.6　**比例中項はみぎの図のように円の接線を使って作図することができる。この方法を説明せよ。** (説明図)

問 3.2.3.7　**比例中項はまた右のように直角三角形の性質を使って作図することもできる。この方法を説明せよ。** (説明図)

問 3.2.3.8　**与えられた長方形と等積な正方形を作れ。**

問 3.2.3.9　**長さ 1 の線分を定め、長さ $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\cdots\cdots$ の線分を、比例中項の作図により求めよ。**

問 3.2.3.10　**与えられた正方形の面積の $\frac{1}{2}$ 倍と等積な正方形を作れ。**

練習問題 [8]

練習問題 8.1　**一つの円において、弧 AC と 弧 BD とが等しいならば AC // BD といってよいか。**

練習問題 8.2　**$\triangle$ABC の外接円の弧 AB、AC の中点をそれぞれ M、N とし、弦 MN が 辺 AB、AC と交わる点を P、Q とすれば $\triangle$APQ は二等辺三角形である。**

練習問題 8.3　**二つの円が 点 P で接するとき、P を通って二つの 割線 AB、CD を引き、二円との交点を図のように A、B、C、D とすれば AC // BD である。**　(説明図)

練習問題 8.4　**二つの円の交点を A、B とし、B を通る割線が二円と交わる点を C、D とすれば、$\triangle$ACD の形は割線 CBD の位置に関係なく一定である。**

練習問題 8.5　**$\triangle$ABC と $\triangle$A′B′C′ とで、BC = B′C′、∠A = ∠A′ ならば、こ**れら) の外接円は等しい。∠A + ∠A′ = 180° ならばどうか。

練習問題 8.6　**$\triangle$ABC の垂心を H とすれば**

$$\triangle \mathrm{ABH} \qquad \triangle \mathrm{BCH} \qquad \triangle \mathrm{CAH}$$

の外接円はすべて $\triangle$ABC の外接円に等しい。

練習問題 8.7　**三角形の頂点から対辺に引いた三つの垂線の足を頂点とする三角形を垂足三角形という。三角形の垂心は、その垂足三角形の内心または傍心である。**　(説明図)

練習問題 8.8　**二つの点 A、B を通り、直線 g に接する円を作図せよ。**

(ヒント図)

練習問題 8.9 **直線** g **の同じ側に二つの点** A、B **がある。点** P **が** g **上をうんどうするとき、**∠APB **が最大になるのはどこか。またその位置を作図せよ。**

練習問題 8.10 **一つの円に内接する 四角形**ABCD **があって、その対角線** AC、BD **は点** O **で直交している。このとき** O **から** AB **に引いた垂線** OH **は辺** CD **を二等分する。** **(ブラーマグプタの定理)** (説明図)

脚注 **ブラーマグプタ** (Brahmagupta 598 **年ごろ**) **ガンジス川のほとり、パトナ市に生まれた人で、インド第一の数学者とされてえいる。アリアバーチア** (Alyabhtya) **という算術の著書は有名でる。**

練習問題 8.11 **三角形の二つの辺の積は、この二つの辺の共通頂点から残りの辺に引いた垂線と、外接円の直径の積に等しい。すなわち、右の図で** (説明図)

$$\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC} = \mathrm{AH} \cdot \mathrm{AD}$$

となる。

練習問題 8.12 **三角形の面積を** S**、三つの辺の長さを** a、b、c **半周を** p **とすれば、外接円の半径** R **および内接円の半径** r **は次の式で与えられる。**

$$R = \frac{abc}{4R} \qquad r = \frac{S}{p}$$

練習問題 8.13 **与えられた 角**XOY **の二等分線上の定点** P **と頂点** O **とを通る任意の円が** OX、OY **と交わる点を** A、B **とすれば、**OA + OB **は一定である。**

3.3 円の周と面積

3.3.1 円の周

円の周を、円に内接または外接する正多角形を使って求めようとする試みは古くから行われた。ここでもこの方法によって、円周の公式 $\ell = 2\pi r$ を導いてみよう。その準備として、まず内接正多角形と外接正多角形について調べる。

定理 40 円周を n 等分する点を順に結んだときにできる n 角形は正 n 角形である。

(証明) 円周を n 等分する点を A_1、A_2、A_3、$\cdots\cdots$、A_n とし、これを順に結んで多角形を造ると (説明図)

$$\text{弧}\,\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 = \text{弧}\,\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3 = \cdots\cdots = \text{弧}\,\mathrm{A}_n\mathrm{A}_1$$

ゆえに

$$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 = \mathrm{A}_2\mathrm{A}_3 = \cdots\cdots = \mathrm{A}_n\mathrm{A}_1$$

また $\angle\mathrm{A}_1$、$\angle\mathrm{A}_2$、$\cdots\cdots$、$\angle\mathrm{A}_n$ はいずれも円周の $\frac{n-2}{n}$ 倍の弧に対する円周角であるから等しい。

ゆえに n 角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\cdots\mathrm{A}_n$ は正 n 角形である。 $\square$

問 3.3.1.1 円に内接する等辺 n 角形は正多角形か。

問 3.3.1.2 円に内接する等角五角形、等角六角形は正多角形か。

定理 41 **円周を n 等分する点における n 個の接線によってできる n 角形は正 n 角形である。**

(証明) 次の図で $\angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3$、$\angle B_1$、$\angle B_2$ **とはそれぞれ** $\angle A_1OA_2$、$\angle A_2OA_3$ **の補角であるから** $\angle B_1 = \angle B_2$ (説明図)

次に

$$\triangle OB_1A_2 \equiv \triangle OB_2A_2 \equiv \triangle OB_2A_3 \equiv \triangle OB_3A_3$$

となるから $B_1A_2 = B_2A_2 = B_2A_3 = B_3A_3$

ゆえに $B_1B_2 = B_2B_3$

以下同様にして、すべての角が等しく、すべての辺が等しくなるので、n 角形 $B_1B_2 \cdots\cdots B_n$ **は正 n 角形である。** ∎

問 3.3.1.3 **直径1の円に内接する正四角形と正八角形の周の長さを求めよ。**

問 3.3.1.4 **直径1の円に外接する正六角形と正八角形の周の長さを求めよ。**

(直系1の) **円に内接する正四角形、正八角形、正十六角形、$\cdots$ の周を** s_4、s_8、s_{16}、$\cdots$ **とし、円に内接する正四角形、正八角形、正十六角形、$\cdots$ の周を** s'_4、s'_8、s'_{16}、$\cdots$ **とすれば**

$$s_4 < s_8 < s_{16} < \cdots\cdots < s'_{16} < s'_8 < s'_4$$

となり、しかも n を限りなくおおきくすれば、ある一定の数に限りなく近ずくことがわかる。これから直径1の円周の長さは

$$3.141592 \cdots\cdots$$

であることがわかる。

森記 べき乗や数列を用いずに数列の極限を扱っていることによる苦労がみられる。s_n を内接正 2^n 角形の面積、S_n を外接正 2^n 角形の面積とするとき、両者の 13 項までの値が小数点以下 7 桁で書かれた表が載せられている。

定理 42 円周の長さは、その直径 (半径) に比例する。

(証明) 半径 r の 円O および半径 r' の 円O′ に内接する正 n 角形の周をそれぞれ ℓ_n、ℓ'_n とすれば (一辺とその端と中心を結ぶ半径から成る三角形は相似であるから)

$$\frac{\ell_n}{\ell'_n} = \frac{r}{r'}$$

よって

$$\frac{\ell_n}{2\pi r} = \frac{\ell'_n}{2\pi r'}$$

したがって円周の長さは直径に比例する。 □

上の定理によって $\frac{\ell_n}{2\pi r}$ は一定であることを知った。この値を**円周率**といい、普通 π で洗わす。

$$\ell = 2\pi r$$

ここで $2r = 1$ とすれば $\ell = \pi$ となるから、π は直径 1 の円の長さに等しい。これは前に述べたように $3.141592 \cdots$ である。円周率のくわしい値は $\pi = 3.14159265358979323846 2 \cdots$ である。

問 3.3.1.5 円周率の近似値として $\frac{22}{7}$、$\frac{355}{113}$ を用いることがある。これを小数に直すと円周率と小数第何位まで一致するか。

定理 43　**円周を ℓ、直系を d、半径を r とすれば**

$$\ell = \pi d \qquad \ell = 2\pi r$$

である。

すでに学んだように、半径の等しい扇形において、中心角と弧の長さとは比例するので、次の公式が導かれる。

系 43.1 **半径 r、中心角 α 度の扇形の弧の長さはを ℓ とすれば**

$$\ell = \frac{\pi\alpha}{180} r$$

問 3.3.1.6　**半径** 5cm **の円を、右の図のようにとなり合うものが互いに外接するように並べ、外側に** 6 **本の接線と、**6 **個の外側の弧で囲まれた図形の周を求めよ。** (説明図: 1 つの円の回りに 6 この円、$\frac{360}{6} = 60$)

問 3.3.1.7　**与えられた二つの円の周の和または差に等しい長さを円周とする円を作れ。**

問 3.3.1.8　**一辺の長さ a の 正三角形** ABC **の内部に、合同な三つの弧** BC、CA、AB **を作り、互いに外接するようにするとき、この三つの弧の長さの和を求めよ。** (説明図)

3.3.2　円の面積

円の面積もまた、内接正 n 角形の面積と外接正 n 角形の面積とを考え、その辺陬を限りなく増すことによって求められる。

定理 44　**半径 r の円の面積を S とすれば**

$$S = \pi r^2$$

である。

(証明)　半径 r の円に内接する正 n 角形の面積を S_n、周を s_n、中心から一辺に引いた垂線の長さを d_n とすれば

$$S_n = \frac{1}{2}s_n d_n$$

となる。またこの円に外接する正 n 角形の面積を S'_n、周を s'_n とすれば

$$S'_n = \frac{1}{2}s'_n r$$

となる。よって円の面積を S とすれば

$$\frac{1}{2}s_n d_n < S < \frac{1}{2}s'_n r$$

ここで辺数を限りなく大きくすれば

d_n は r に、　s_n は $2\pi r$ に、　s'_n は r に

限りなく近づくから上の不等式の両端の項は同一の値 πr^2 に近づく。

したがって、それらにはさまれた S は πr^2 に等しい。

ゆえに　$$S = \pi r^2$$ □

半径の同じ扇形の面積は中心角に比例するから、次の公式が導かれる。

系 44.1 **半径 r、中心角 α 度の扇形の弧の長さを ℓ、面積を S とすれば次の公式が成り立つ。**

$$S = \frac{\pi\alpha}{360}r^2 = \frac{1}{2}\ell r$$

例 3.3.2.1　**半径 r の二つの円 O、O′ が、互いに他の中心を通るように交わるとき、共通の部分の面積を求めよ。**

(解)　の二つの円 O、O′ の交点を A、B とすれば、△AOO′、△BO′ は一辺の長さが r の正三角形であるから、その面積はともに $\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$ である。

次に

$$\begin{aligned}\text{弓形AOの面積} &= (\text{扇形O}'\text{AOの面積}) - (\triangle \text{AOO}'\text{の面積}) \\ &= \frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2\end{aligned}$$

よって求める面積は

$$\frac{\sqrt{3}}{4}r^2 \times 2 + 4\left(\frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2\right) = \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)r^2$$

(答)　$\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)r^2$

問 3.3.2.1　**一辺の長さ a の正三角形から、これに内接する円を除いた部分の面積を求めよ。** (説明図)

問 3.3.2.2　**半径 r の円を、それに内接する正三角形の一つの辺によって二つの弓形に分けたとき、おのおのの弧の長さと面積を求めよ。**

問 3.3.2.3　**円の 直径AB を C、D で三等分し、AC、AD、CD、DB を直径とする半円を図のように書くとき、二つの曲線 ACB、ADB によってこの円は三等分 s れる。** (説明図: A を端点とするものは上側他は下側に)

問 3.3.2.4　与えられた二つの円の面積の和または差に等しい面積を持つ円を作れ。

3.3.3　弧度法

角の大きさを測るには、度・分・秒などの単位を用いる六十分法の他に、次に学ぶ弧度法というものがある。

半径 r の円で、長さが r に等しい弧を考え、それに対応する中心角を θ 度とすると、　(説明図)

$$\frac{\theta^\circ}{360^\circ} = \frac{r}{2\pi r} \qquad \text{(中心角と弧長は比例)}$$

ゆえに

$$\theta^\circ = 360^\circ \times \frac{r}{2\pi r} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 295778 \cdots\cdots \fallingdotseq 57^\circ 17' 45''$$

となって、θ の大きさは半径 r に関係なく一定である。

この一定の角の大きさを**1弧度**または**1ラジアン** (radian) と呼び、これを単位として角を測る方法を**弧度法**という。弧度法と六十分法との換算には、次の関係を用いればよい。

$$\pi \text{ ラジアン} = 180^\circ$$

弧度法では普通ラジアンを省略する。

問 3.3.3.1　次の角をラジアンで表せ。

$$60^\circ \qquad 90^\circ \qquad 180^\circ \qquad 45^\circ \qquad 135^\circ$$

問 3.3.3.2　次の弧度法で表された角を六十分法で表せ。

$$\frac{\pi}{6} \qquad \frac{2}{3}\pi \qquad 2\pi \qquad \frac{\pi}{10} \qquad \frac{2}{5}\pi$$

弧度法を用いれば、扇形の弧の長さは簡単な式で表される。すなわち半径 r、中心角 θ ラジアンの扇形の弧の長さを ℓ、面積を S とすれば、次が成り立つ。

$$\ell = r\theta \qquad S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}\ell r$$

問 3.3.3.3　半径 a の円で、$\frac{3}{4}\pi$ ラジアンの角を含む弓形の周と面積とを求めよ。

練習問題 [9]

練習問題 9.1　次の図で影を付けた部分の面積を求めよ、ただし正方形の一辺の長さは a である。 (問題図)

練習問題 9.2　二つの滑車がある。その半径はそれぞれ 50cm、20cm で、中心間の距離は 140cm である。ベルトを右の図のように掛けたとき、その長さは 何cm になるか。 (問題図)

練習問題 9.3　直角三角形の各辺を直径とする円を書くとき、この三角形の面積 H は月形の面積 P、Q の和に等しい。(ヒッポクラテスの定理)

脚注　ヒッポクラテス Hippoctates (B.C. 約 430 年)　ギリシャの数学者。当時のギリシャでは円と面積の等しい正方形をどのように作図するのか (円積問題) について、多くの数学者が頭を悩ましていた。ヒッポクラテスもそのひとりで、彼はこの研究中に上の問題を発見したといわれている。本題は円弧だけで囲まれた図形の面積が、直線で

囲まれた図形の面積に等しいので、円積問題を解決するかぎを与えられるのではないかと考えられ、有名になったものと思われる。実際には円積問題とは関係がない。この問題は近世になって解決されたが、その結論によると定木とコンパスだけでは不可能である・

練習問題 9.4 牧場の中の長方形の小屋の一隅にヒツジが長さ ℓm のなわで結び付けられている。ヒツジの動きうるおよその範囲を作図し、その面積を求めよ。ただし小屋の間口はと奥行きを am、bm $(a > b)$ とっし、$a < \ell < a + b$ とする。

総合問題 III

――― A ―――

総合問題 3.A.1 **一直線が** △ABC **の辺** AB、BC **および** AC **の延長とそれぞれ** R、P、Q **において交わるとき、**△BPR **の外接円と、**△CPQ **の外接円との第二の交点を** S **とすると、**△ABC **の外接円は** S **を通る。**

(説明図)

総合問題 3.A.2 △ABC **において** ∠A **の二等分線が辺** BC **と交わる点を** D **とし、**AD **の延長が** △ABC **の外接円と交わる点を** E **とすれば、**AB·AC = AD·AE **となる。** (説明図)

総合問題 3.A.3 **前問から** $\mathrm{AD}^2 = \mathrm{AB{\cdot}AC}$ - BD·DC **を導け。**

総合問題 3.A.4 △ABC **の三つの辺の長さが** BC = a、CA = b、AB = c **であるとき、**∠A **の二等分線** AD **の長さを** a、b、c **で表せ。**

総合問題 3.A.5 △ABC **の外接円の 弧**BC **上の仁井の点 から辺** BC、CA、AB **またはその延長に引いた垂線の足を** L、M、N **とすれば、これらの三つの点は一つの直線上にある。** (説明図)

(これをシムソンの定理という。直線 NLM **をシムソン線という。)**

$\boxed{\text{脚注}}$ **シムソン** Simson (1687-4768) **イギリスのグラスゴー大学の教授。彼の編集したユークリッド幾何原本の英語訳はその後の幾何の教科書の基礎となった。**

――― B ―――

総合問題 3.B.1　弓形の弧と弦に接する円の接点を結ぶ直線は定点を通る。 (説明図)

総合問題 3.B.2　△ABC の垂心を H、AH の延長が外接円と交わる点を D とすれば、HD は BC またはその延長により垂直に二等分される。

総合問題 3.B.3　△ABC の垂心を H、外心を O、O から 辺BC に引いた垂線を AM とすれば (説明図)

$$\mathrm{AH} = 2\ \mathrm{OM}$$

となる。

総合問題 3.B.4　円に内接する四角形の二組の対辺の積の和は、対角線の積に等しい。 (**これをトレミーの定理という。**)

$\angle\mathrm{CAD} = \angle\mathrm{BAE}$ にとって、$\triangle\mathrm{ABE}$ と $\triangle\mathrm{ACD}$ とは相似、$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{AED}$ とは相似となることを利用せよ。

$\boxed{\text{脚注}}$ **トレミー** (Ptolemy) **エジプトに生まれた。起源** 140∼160 **年ごろアレクサンドリアで活躍した天文学者で、彼の天動説はコペルニクスの地動説が出るまで、宇宙論は本より人生観まで支配していた。アルマゲスト** (Almagest) **という名で知られている彼の著作には、当時としては非常に進んだ三角法の理論がしるされている。上の定理はユークリッドの幾何原本 第巻 の付録に出ているものである。**

総合問題 3.B.5　正三角形 ABC の外接円の 弧BC 上の任意の点を P とすれば、$\mathrm{AP} = \mathrm{BP} \div \mathrm{CP}$ である。

補充問題 [3]

補充問題 3.1 円の 弦AB ヲ延長して BC を半径にに等しくとり、C と中心O とを結ぶ直線が円周と交わる点を図のように D、E とすれば、弧AB は 弧BD の3倍に等しい。 (説明図)

補充問題 3.2 等しい二円が二点 A、B で交わるとき、B を通る直線が二円と再び交わる点を C、D とすれば $\mathrm{AC} = \mathrm{AD}$ である。

補充問題 3.3 $\triangle\mathrm{ABC}$ の底辺の長さおよびその位置と頂角 A の大きさが一定なとき、B、C より対辺に引いた垂線の足をそれぞれ C、D とすれば、DE は定長である。

補充問題 3.4 円 O 上の点 P から円 O 上の定点 G を中心とする円に引いた二つの接線が 円O と交わる点を A、B とすれば、直線AB は 点 P の位置に関係なく一定の方向をもつ。

補充問題 3.5 $\angle\mathrm{A} = 90°$ の 三角形ABC で、BC を一辺とする正方形 BCDE を作り、対角線 BD、CE の交点を O とする。$\angle\mathrm{A}$ の二等分線は O を通る。 (説明図)

補充問題 3.6 一辺の長さが a の正三角形の辺接し、かつ互いに外接する三つの等円の半径の長さを a で表せ。

補充問題 3.7 二点 A、B で交わる二円の共通接線 CD が二円に接する点を C、D とし、三点 B、C、D を通る円と 直線AB との交点を E とすれば、四辺形ACED は平行四辺形である。 (説明図)

補充問題 3.8 **互いに外接する二円** O、O′ **の共通外接線** AB、CD **を引いて 円**O **との接点を** A、C **とし、円**O′ **との接点を** B、D **とすれば**

$$\mathrm{AB} = \frac{1}{2}\ (\mathrm{AC} + \mathrm{BD})$$

である。 (説明図)

補充問題 3.9 O **を中心とする二つの同心円の大円の 直系**AD **が小円と交わる点を** B、C **とする。大円上の点を** P、**小円上の点を** Q **とすれば**

$$\mathrm{PB}^2 + \mathrm{PC}^2 = \mathrm{QA}^2 + \mathrm{QD}^2$$

である。 (説明図)

補充問題 3.10 **円**O **の定直系** AB **に平行な弦を** PQ **とすれば**

である。 (説明図)

補充問題 3.11 $\mathrm{AP}^2 + \mathrm{AQ}^2$ **は一定である。**