♠ ♣

講義ノートの周辺

Part I 高等学校数学I幾何

4. 軌跡と作図

森 隆一

$\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\epsilon\,(\varepsilon)\,\zeta\,\eta\,\theta\,(\vartheta)\,\iota\,\kappa\,\lambda\,\mu\,\nu\,\xi\,o\,\pi\,(\varpi)\,\rho\,(\varrho)\,\sigma\,\varsigma\,\tau\,\upsilon\,\phi\,(\varphi)\,\chi\,\psi\,\omega$

$\Gamma\,\Delta\,\Theta\,\Lambda\,\Xi\,\Pi\,\Sigma\,\Upsilon\,\Phi\,\Psi\,\Omega$

$\mathcal{A}\,\mathcal{B}\,\mathcal{C}\,\mathcal{D}\,\mathcal{E}\,\mathcal{F}\,\mathcal{G}\,\mathcal{H}\,\mathcal{I}\,\mathcal{J}\,\mathcal{K}\,\mathcal{L}\,\mathcal{M}\,\mathcal{N}\,\mathcal{O}\,\mathcal{P}\,\mathcal{Q}\,\mathcal{R}\,\mathcal{S}\,\mathcal{T}\,\mathcal{U}\,\mathcal{V}\,\mathcal{W}\,\mathcal{X}\,\mathcal{Y}\,\mathcal{Z}$

$\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{E}\,\mathfrak{F}\,\mathfrak{G}\,\mathfrak{H}\,\mathfrak{I}\,\mathfrak{J}\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{L}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{O}\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{Q}\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{T}\,\mathfrak{U}\,\mathfrak{V}\,\mathfrak{W}\,\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}\,\mathfrak{Z}$

$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}\,\mathfrak{f}\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{l}\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{o}\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}$

$\mathbb{A}\,\mathbb{B}\,\mathbb{C}\,\mathbb{D}\,\mathbb{E}\,\mathbb{F}\,\mathbb{G}\,\mathbb{H}\,\mathbb{I}\,\mathbb{J}\,\mathbb{K}\,\mathbb{L}\,\mathbb{M}\,\mathbb{N}\,\mathbb{O}\,\mathbb{P}\,\mathbb{Q}\,\mathbb{R}\,\mathbb{S}\,\mathbb{T}\,\mathbb{U}\,\mathbb{V}\,\mathbb{W}\,\mathbb{X}\,\mathbb{Y}\,\mathbb{Z}$

♡ ♢

目 次

第4章　軌跡と作図

プラトー　Purato (B. C. 429 ? ～ 343)　　プラトーの写真

ギリシャの偉大な哲学者で、数学は人間の精神を開発するのに大いに役立つと考えた。アテネで開いた学校の玄関に「幾何学は知らざるものはここに入るべからず。」と大書したことは有名な話である。作図題で解析のことをはじめて考えたのは彼であるといわれている。

4.1　軌跡

4.1.1　軌跡の観察

円に糸をまきつけて、その糸の一端に鉛筆をつけ、糸を張りながらほごすと鉛筆は一つの曲線を描く。これはインボリュートと呼ばれる曲線である。　(説明図)

また、直線上で円をころがすと、その円周上の点は、次の図のような曲線を描く。これはサイクロイドと呼ばれる曲線である。(イラスト的説明図)

上の例のように、点がある条件にしたがいながら運動した跡、言い換えれば、ある条件に適する点の集まってできる図形を**軌跡**という。

例 4.1.1.1 半径 a の 円O が、右の図の 折れ線ABCDE 上を、A から E までころがるとき、この円の中心 O の:軌跡を書け。 (説明図: BCD がテント状)

(解) 円O が直線に接する点を点を H とすれば、OH $= a$ であるから、O はその接する直線に平行な直線上にある。ゆえに 円O が AB 上をころがるときは、O の軌跡は 線分A′B′、次に BC 上をことがるときの軌跡は 線分A′B′、C のところでは円が 点C を中心として回転するので、軌跡は 円弧C′C″ になる。線分 CD、DE 上をころがるときは、それぞれ線分 C″D′、D′E ′ になる。したがって、求める軌跡は 線分A′B′C′C″D′ E′ である。 (軌跡の図)

$\boxed{\text{森記}}$ 数学の解答としては、上では不十分である。不足するのは、折れ線 A′B′C′C″D′ E′ の指定、すなわち、作図である。したがって、構成は作図をさきにする必要がある。

問 4.1.1.1 辺の長さ a の正三角形を一つの直線 g 上でころがすとき、その一つの頂点の軌跡を求めよ。 (説明図)

問 4.1.1.2 △ABC を一つの直線 g 上でころがし、一回転させるとき、その外心の軌跡を書け。外接円の半径を r とすれば、軌跡の全長はいくらか。

問 4.1.1.3 半径 r の円が周 ℓ の五角形に沿って、その外側をころがるとき、円の中心の軌跡を書け。またその長さを求めよ。

一つの定直線とから等しい距離にある点の軌跡を放物線といい、その定点を焦点、その定直線を準線という。 (説明図)

(説明図) (写真: 放物線を応用した建物の例)

放物線は、焦点を通り準線に垂直な直線に関して対称な曲線で、この対称軸を放物線の軸といい、この軸と放物線との交点を頂点という。

問 4.1.1.4 **一直線 g と、これより 2cm 離れた点 F がある。g と F とに至る距離の等しい点 P の軌跡を書け。(条件に適する幾つかの点を定木とコンパスとによって求め、それらの点を通るなめらかな曲線を書け。)**

二つの定点からの距離の和が一定の点の軌跡を楕円 (長円) といい、その二つの定点を焦点という。 (説明図)

楕円は二つの焦点を通る直線に関して対称である。また焦点を結ぶ線分の垂直二等分線に関しても対象である。始の対称軸が楕円と交わる点を A、A′ とし、あとの対称軸が楕円と交わる点を B、B′ とするとき、直線 AA′ または 線分 AA′ を長軸、直線 BB′ または 線分 BB′ を短軸といい、その交点 O を中心という。

楕円の作図 **楕円を器具によって書くには、定長の糸の両端を二点 F、F′ とにピンで留め、鉛筆の先 P で糸を張り、糸がたるまないように P を動かせばよい。糸の両端を F と F′ とに留める代わりに糸の両端を輪にして、二つのピンに掛ければ、なお書きやすくなる。** (説明図)

問 4.1.1.5 **$FF' = 4\text{cm}$ のとき、F、F′ からの距離が 8cm の点 P の軌跡を書け。**

脚注 **ケプラ-の発見した遊星の運動の三大法則**

(1) 遊星は太陽を焦点とする楕円運動をする。
(2) 同じ時間内に遊星の描く曲線と太陽とによって作られる扇形状の図形の面積は一定である。
(3) 周期の 2 乗は楕円の長軸の 3 乗に比例する。 (写真風イラスト)

二つの定点からの距離の差が一定な点の軌跡を**双曲線**といい、その二つの定点を**焦点**という。

双曲線は二つの焦点を通る直線に関して対称である。また焦点を結ぶ線分の垂直二等分線に関しても対称である。初めの対称軸を**実軸** (交軸)、あとの対称軸を**虚軸**といい、その交点を**中心**という。

問 4.1.1.6 $\mathrm{FF}' = 4\mathrm{cm}$ のとき、F、F$'$ からの距離の差が 2cm の点 P の軌跡を書け。

以上の放物線 · 楕円 · 双曲線をまとめて**円錐曲線**という。

円錐曲線と呼ぶのは、円錐の切り口がこれらの曲線になるからである。

(説明図: (1) 楕円、(2) 円と放物線、(3) 双曲線)

注意 円は二つの焦点が一致した楕円と考えられるので、楕円の中に含まることができる。

(上の説明図に対応する写真

4.1.2 直線になる軌跡

軌跡とは「ある条件に適する点が集まってできる図形」であるから、「条件に適する点をすべて含んでいる図形」であって、しかも「条件に適さな

い点は一つも含まない図形」でなければならない。この二つを満たしているかどうかを見るために、軌跡では次の二つのことを証明しなければならない。

(i) **点P が 条件A に適すれば、点P は 図形K 上にある。**

これは 点P が 条件A に適するためには、図形K 上にあることが必要であることを明らかにすることで**必要条件**の証明である。

(ii **点P が 図形K 上にあれば、点P は 条件A に適する。**

これは 点P が 条件A に適するためには、図形K 上にあることが十分であることを明らかにすることで**十分条件**の証明である。しかも、これは (i) の逆の証明になる。

定理 45 二つの定点 A、B から等しい距離にある点の軌跡は、線分 AB の垂直二等分線である。

(証明) (i) (必要性) 条件に適する点を P とすれば、 PA = PB である。

A、B 中点を M として、二つの三角形 PAM と PBM とを比べれば、三つの辺がそれぞれ等しいから、 (説明図)

$$\triangle \mathrm{PAM} \equiv \triangle \mathrm{PBM}$$

よって $\angle \mathrm{PMA} = \angle \mathrm{PMB} = 1\ \angle \mathrm{R}$

すなわち、動点P は 線分 AB の 垂直二等分線 g 上にある。

(ii) (十分性) 逆に g 上の任意の点を P′ とすれば、△P′AM と △P′AM とにおいて

$$\mathrm{AM} = \mathrm{BM} \qquad \mathrm{MP'}\ \text{は共通}$$

$$\angle \mathrm{P'MA} = \angle \mathrm{P'MB} = 1\ \angle \mathrm{R}$$

であるから　　$\triangle \mathrm{P'AM} \equiv \triangle \mathrm{P'AM}$

ゆえに　　　　　　　$\mathrm{AP'} = \mathrm{BP'}$

すなわち 点 P′ は条件に適する。

以上から、求める軌跡は 線分 AB の垂直二等分線 g である。 □

問 4.1.2.1　二つの定点を通る円の中心の軌跡を求めよ。

問 4.1.2.2　互いに外にある二つの等円の両方に外接する円の中心の軌跡を求めよ。

定理 46　点 O で交わる二直線 AB、CD に等しい点の軌跡は、この二直線の交角を二等分する二つの直線である。

(証明) (i) $\angle \mathrm{AOC}$ 内について考える。

(i) 条件に適する任意の点を P とし、P から AB、CD に引いた垂線を PH、PK とすれば $\mathrm{PH} = \mathrm{PK}$ である。

$\triangle \mathrm{POH}$ と $\triangle \mathrm{POK}$ とにおいて

$$\mathrm{PH} = \mathrm{PK} \qquad \mathrm{PO}\ \text{は共通} \qquad \angle \mathrm{PHO} = \angle \mathrm{PKO} = 1\ \angle \mathrm{R}$$

よって　　　　　$\triangle \mathrm{POH} \equiv \triangle \mathrm{POK}$

であるから $\angle \mathrm{POH} \equiv \angle \mathrm{POK}$ となって、点 P は $\angle \mathrm{AOC}$ の二等分線 OX 上にある。　(説明図)

(ii) 逆に、OX 上の任意の点を P′ として、P′ から OA、OC に引いた垂線を P′H′、P′K′ とすれば、$\triangle \mathrm{P'OH'}$ と $\triangle \mathrm{P'OK'}$ とにおいて

$\mathrm{P'O}$ は共通　　$\angle \mathrm{P'OH'} = \angle \mathrm{P'OK'} = 1\ \angle \mathrm{R}$

ゆえに　　　　　$\triangle \mathrm{P'OH'} \equiv \triangle \mathrm{P'OK'}$

であるから、$\mathrm{P'H'} = \mathrm{P'K'}$ となって、点 $\mathrm{P'}$ は条件に適する。

よって、P が $\angle \mathrm{AOC}$ 内にあるときの軌跡はこの角の二等分線 OX である。

同様にして P が他の角内にあるとき、それらの角の二等分線が軌跡になる。したがって求める軌跡は二直線 AB、CD の交角を二等分する二つの直線 $\mathrm{XX'}$、$\mathrm{YY'}$ である。 □

問 4.1.2.3　二つの交わる定直線に接する円の中心の軌跡を求めよ。

問 4.1.2.4　平行な二直線に至る距離の等しい点の軌跡を求めよ。

定理 47　定直線から一定の距離にある点の軌跡は、この直線に平行な二つの直線である。

問 4.1.2.5　この定理を証明せよ。　(説明図)

問 4.1.2.6　長さ 4cm の 線分 BC を底辺とし、面積が $6\mathrm{cm}^2$ の 三角形 ABC の頂点 A の軌跡を求めよ。

以上の例からわかるように、逆の証明、すなわち十分条件の証明は、必要条件の証明を逆にたどることによって容易に証明を得れれることが多い。それで今後は逆の証明を省略し、必要条件だけを示すことにする。

例 4.1.2.1　定点 O と点直線 g がある。点 P が 直線 g 上を運動するとき OP を $m : n$ に内分する 点 Q の軌跡を求めよ。

軌跡がどんな図形になるかを知るには、条件に適する点の並び方を見ればよい。軌跡は図のほうに平行な直線であることがわかる。 (説明図)

森記 特殊なものを含めるとよい。この例では垂線。動く範囲に制限がある場合は、橋の点など。

(解) 条件に適する任意の点を Q とする。O から g に垂線 OH を引き、OH を $m:n$ に内分する点を K とし、K と Q とを結べば (説明図)

$$\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}}=\frac{\mathrm{OK}}{\mathrm{OH}}=\left(\frac{m}{n}\right)$$

ゆえに $\mathrm{QK} \parallel \mathrm{PH}$

よって、Q は 定点K を通り、直線 g に平行な定直線 h 上にあるから、求める直線は h である。 □

問 4.1.2.7 線分 AB と 点O とがある。点P が 線分 AB 上を運動するとき、OP の中点 Q の軌跡を求めよ。

問 4.1.2.8 線分 AB と 線分 MN とがある。点C が MN 上を運動するとき △ABC の 重心 G の軌跡を求めよ。 (説明図)

問 7 と問 8 の軌跡は直線全体でなく、その一部分である。このような場合に軌跡の端の点を軌跡の限界という。

4.1.3　円になる軌跡

円は定点からの距離が一定な点の軌跡であるから、動点 P と定点 O との距離が一定なときは、P の軌跡は O を中心とする円である。

中心が O で半径が r の円を簡単に 円(O, r) と表すことにする。

例 4.1.3.1　定円 $(O,\ r)$ と定点 A がある。点 P がこの円周上を運動するとき、線分 AP の中点 Q の軌跡を求めよ。

まず軌跡がだいたいどんな図形になるかを探るため、条件に適する点を数個とってみると、右の図のように A を相似の中心として円 O を二分の一に縮小したものになる見当がつく。 (説明図)

(解)　条件に適する点を Q とする。A と O とを結び線分 AO の中点を O′ とし、O′ と Q とを結べば、△AOP で O′、O はそれぞれ二つの辺の中点であるから (説明図)

$$\mathrm{O}' = \frac{1}{2}\ \mathrm{OP} = \frac{r}{2}$$

ゆえに点 Q は 円(O, $\frac{r}{2}$) の上にある。

よって求める軌跡は 円(O, $\frac{r}{2}$) である。 □

$\boxed{\text{森記}}$ 前項で書かれているように、十分条件の証明が省かれている。

問 4.1.3.1　定円 (O. r) の 定長 a $(a < 2r)$ の 弦AB の中点 M の軌跡は何か。

問 4.1.3.2　**定円** $(\mathrm{O}.\ r)$ **の周上の動点** T **から接線** PQ **を引いて、**PQ **が定長** a **になるようにするとき、二点** P、Q **はどんな範囲にあるか。ただし** T **は線分** PQ **上にあるものとする。**

問 4.1.3.3　**二つの定点** A、B **を通る円に、線分** AB **の延長上の定点** C **から引いた接線の接点の軌跡を求めよ。**

定理 48　**与えられた 線分** AB **を定角** α **に見込む点の軌跡は、**AB **を弦とし、角** α **を含む二つの弧である。ただし二点** A、B **は除く。**

問 4.1.3.4　**上の定理を証明せよ。**

問 4.1.3.5　**与えられた 線分** AB **を** $1\ \angle\mathrm{R}$ **に見込む点の軌跡を求めよ。**

例 4.1.3.2　**二つの定点** A、B **に至る距離の比が** $m:n$ **である点の軌跡を求めよ。**$(m \neq n$ **とする。**)

たとえば A、B **からの距離の比が** $2:1$ **である点を数個取ってみると、右の図のように一つの円周上に並ぶ。この円は** A、B **を** $2:1$ **に内分する点を** D、**外分する点を** E **とすると 線分** DE **を直径とする円である。** (説明図、12 個の点)

(解)　条件に適する任意の点を P **とすれば** $\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=m:n$ **である。**

AB **を** $m:n$ **に内分する点を** D、**外分する点を** E **とすれば**

$$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=\mathrm{AP}:\mathrm{BP}\ (=m:n\ )$$ (説明図)

$$\mathrm{AE}:\mathrm{EB}=\mathrm{AP}:\mathrm{BP}\ (=m:n\ )$$

ゆえに DP **は 角** APB **を二等分し、**EP **は 角** APB **の外角を二等分するから**

$$\angle\mathrm{DPE} = 1\ \angle\mathrm{R}$$

よって軌跡は DE を直径とする円である。(この円をアポロニウスの円という。)

脚注 アポロニウス Apollonius (B.C.260?∼B.C.200?) **アレクサンドリアの数学者。円錐曲線における彼の研究は実に驚くべきもので、これに関する主要なものを知っていた。彼は一つの円錐の切り口として三種の円錐曲線を導いた。**

> 森記 証明の 'ゆえに' に続く文章は説明不足である。教科書としては、'2 章 3 節 定理 24 の系により' (本稿 64 頁) 程度は必要である。この部分が線分の比が $m : n$ を用いている唯一の部分である。言い換えれば、証明の本体である a。たとえ短くても何らかの説明のないものは、エンジンを取り去った自動車ともいえる。筆者は 'キセル証明' とよんでいる。

問 4.1.3.6 定円 O の内部に 定点 A がある。A を通る任意の割線が 円 O と交わる点を B、C とするとき、弦 BC の 中点 P の軌跡を求めよ。また点 A が円の外部にあるときはどうか。

問 4.1.3.7 △ABC の 底辺 BC は定線分で ∠A は 90° である。BA を A の方に延長して、AP = AC となるようにすれば、点 P の軌跡は何か。

練習問題 [10]

練習問題 10.1 角 XOY の内部にあって、この二つの辺に至る距離の和が 定長 a に等しい点の軌跡を求めよ。 (説明図)

練習問題 10.2 角 XOY の内部にあって、この二つの辺に至る距離の差が 定長 a に等しい点の軌跡を求めよ。

練習問題 10.3 **定点**A **と 定直線**g **とがある。点**B **が** g **上を運動するとき、**A**、**B **を一辺とする 正三角形**ABC **を作れば、頂点**C **の軌跡は何か。**

(説明図)

練習問題 10.4 **定円**(O, r) **と 定点**A **がある。点**B **がこの円上を運動するとき、**AB **を一辺として 正三角形**ABC **を作れば、点**C **の軌跡は何か。**

練習問題 10.5 $\triangle$ABC **の 底辺**BC **は定線分 (長さと位置が一定) で** $\angle \mathbf{A} = \mathbf{60^\circ}$ **のとき、次の軌跡は何か。** (説明図)

1) $\triangle$**ABC の 重心**G**。**

2) $\triangle$**ABC の 内心**I**。**

3) $\triangle$**ABC の** $\angle$**A の 傍心**I**。**

練習問題 10.6 **正方形**ABCD **の辺** BC**、**CD **上にそれぞれ** M**、**N **をとって**$\mathrm{BM} = \mathrm{CN}$ **であるようにとるとき、**AM **と** BN **との交点** P **の軌跡を求めよ。**

4.2 作図

4.2.1 作図題の例

作図のうちで、次にあげるような簡単なものは、基本作図として、定理のように用いるのが普通である。

(1) **線分の中点を求めること。**

(2) **角の二等分線を引くこと。**

(3) **一つの点より一つの直線に垂線を引くこと。** ((I) から (3) の説明図)

(4) **与えられた角に等しい角を、与えられた半直線を一つの辺として作ること。**

(5) **直線外の一点から、その直線に平行な直線を引くこと。**

(6) a、b **が与えられた線分の長さとするとき、**$\sqrt{a^2+b^2}$、$\sqrt{a^2-b^2}$ **を長さにもつ線分を作ること。** ((4) から (6) の説明図)

(7) **線分を与えられた比に内分または外分すること。**

(8) **円外の点から、その円に接線を引くこと。**

(9) **与えられた線分を弦として、与えられた角を含む弓形の弧を書くこと。** ((7) から (9) の説明図)

(10) a、b **が与えられた線分の長さであるとき、**a、b **の比例中項を長さとする線分を作図すること。** ((10) の説明図)

$\boxed{\text{森記}}$ 10 個の基本作図は作図題 1~10 に対応している。

作図題では、普通次の四つの事がらを調べる。

解析　作図を発見する方法で、求める作図ができたと仮定して、その図形がどんな条件を備えているかを調べることである。つまり図形が求めるものとなるための必要条件を求めることである。

作図　解析によって発見した方法により、実際に図を書く方法を述べることである。

証明　上の作図によってできた図形が、問題に述べてある条件を満たしていること、すなわち十分条件であることを明らかにすることである。

吟味　求める図形が。どんな場合にいくつあるか、あるいはないかを明らかにすることである。

例 4.2.1.1 **二つの与えられた点 A、B と直線 g とがある。A、B に至る距離が等しい点を g 上に求めよ。**

((解))　(解析)　作図ができたものとして、求めた点を P とすれば

$$\mathrm{AP} = \mathrm{BP}$$

となるから、P は 線分 AB の垂直二等分線上にある。

(作図)　線分 AB の垂直二等分線を h をつくり、直線 g との共有点を P とすれば、P は求めるものである。

(証明)　P は 線分 AB の垂直二等分線上にあるから、A。B から等距離である。

(吟味)　(1)　g (垂直) AB でないときは、g は h に交わるから、解一つ。

(2)　g (垂直) AB のとき

g が AB の中点を通れば、g と h は一致するから、解無限。

g が AB の中点を通らないならば、$g//h$ となるから、解なし。 □

森記 '解無限' という言い方は初めて聞いたときから気になっていた。'沢山ある' といいかえれば、'何処にある' と聞きたくなる。この問題では、'g 上の任意の点' というのが考えられる。

また、'解なし' というのも '条件を充たす点はない' というのが解ではと思われる。

問 4.2.1.1 直線 g と二点 A、B が与えられてたとき、g に 点 P を求めて、次の条件をそれぞれ満足するようにせよ。

(1) P から AB までの距離が定長 a に等しい。

(2) $\angle$PAB の中線 PM が定長 a に等しい。

(3) $\angle$PAB が 定角 α に等しい。

上の例では解析·作図·証明·吟味をすべて述べたけれども、作図の方法がすぐにわかるものは解析を省略することもある。

例題からわかるように、作図では軌跡が重要な役割を果たしている。作図は点の位置を決めることによってできる。ところが点の位置は二つの線の交点として定められるので、作図ではある軌跡として与えられた図形との交点、ある軌跡と他の軌跡との交点が利用される。

問 4.2.1.2 次の条件に当てはまる $\triangle$ABC を作れ。ただし解析·作図·吟味を述べよ。

(1) BC は定線分、$\angle \mathrm{A} = \alpha$、垂線 $\mathrm{AH} = h$

(2) BC は定線分、$\angle \mathrm{A} = \alpha$、中線 $\mathrm{AD} = \ell$

(3) BC は定線分、中線 $\mathrm{AD} = \ell$、垂線 $\mathrm{AH} = h$

(4) $\mathrm{BC} = a$、$\mathrm{CA} = b$、$\mathrm{AB} = c$

問 4.2.1.3　**円** (O, r) **と、この円の 中心** O **から** a **だけ離れた点** A **とがある。**A **を通る直線を引いて、この円と** B、C **で交わらせ、**B **が** AC **の中点となるようにせよ。(作図と吟味を述べよ。)**

問 4.2.1.4　**与えられた二円の共通外接線を引け。また共通内接線を引け。(解析と作図を述べよ。)** (説明図)

4.2.2　移動と相似を後いる作図

作図法のうちで、図形の移動を応用する方法を移動法という。移動法は移動の種類によって、平行移動法 $cdot$ **対象移動法** $cdot$ **回転移動法などに分けられる。**

例 4.2.2.1　**川岸が平行な川の両側に、二つの地点** A、B **がある。川岸に直角に 橋** MN **をあけて、**A **から** B **二至る 道** AMNB **を最小にしたい。橋をどおにかけたらよいか。**

((**解**))　(**解析**)　MN **に平行で等長な 線分** B′B **を作れば、**

$$\begin{aligned}\ell = \ & \mathrm{AM} + \mathrm{MN} + \mathrm{NB} \\ = \ & \mathrm{AM} + \mathrm{MB'} + \mathrm{B'B}\end{aligned}$$

B′B **は一定であるから** ℓ **を最小にするには** $\mathrm{AM} + \mathrm{MB'}$ **を最小にすればよい。これが最小となるのは、**AM **と** MB′ **とが一つの直線をなすときである。** (説明図)

(**作図**)·(**証明**)·(**吟味**) **は各自試みよ。** □

問 4.2.2.1　**直線** XY **の同側に二点** A、B **がある。**A **から 直線** XY **上に行き、次に** XY **上を 定長** ℓ **だけ進んだのち** B **に向かうものとする。このような道のうち最も短いものを求めよ。** (説明図)

問 4.2.2.2　**二つの定円** O、O′ **と 定直線** AB **がある。**AB **に平行な直線を引いて二つの円とそれぞれ** P、Q **で交わらせ、**PQ **の長さが 定長** ℓ **となるようにせよ。**

例 4.2.2.2　**定直線** XY **の同側に 点** A **と 円** O **とがある。**XY **上に 点** P **を求め、**P **から 円** O **に引いた接線を** PT **とするとき、**$\angle\mathrm{APX} = \angle\mathrm{TPY}$ **となるようにせよ。**

((解))　**(解析)**　**点** A **の 直線** XY **に関する対称点を** A′ **とすれば**

$$\angle\mathrm{A'PX} = \angle\mathrm{APX}$$

しかるに
$$\angle\mathrm{APX} = \angle\mathrm{TPX}$$
(説明図)

よって
$$\angle\mathrm{APX} = \angle\mathrm{TPX}$$

ゆえに A′P **と** PT **とは一つの直線をなすから、**P **は** A′ **より 円** O **に引いた垂線と** XY **との交点である。**

(作図)、(証明) などは各自試みよ。 □

問 4.2.2.3　A **は 定直線** g **上の定点で、**B **と** C **は** g **の両側にある二つの定点である。**g **上に 点** P **を求めて**

$$\angle\mathrm{ABP} = \angle\mathrm{ACP}$$

となるようにせよ。 (ヒント図)

問 4.2.2.4　**直線XY の同じ側にある二つの点を A、B とする。XY 上に点P を求めて**

$$\angle \mathrm{ABX} = 2\ \angle \mathrm{BPY}$$

となるようにせよ。 (ヒント図)

問 4.2.2.5　**三つの定点 A、P、Q がある。正方形ABCD を作って、辺BC が 点P を通り、辺CD が 点Q を通るようにせよ。」** (ヒント図)

作図しようとする図形に相似な図形を作り、それを縮小または拡大することによって条件に合う図形を方法を相似法という。多くの場合に、相似の位置にある図形が利用される。

例 4.2.2.3　**AB を直径とする半円がある。これに 正方形PQRS を内接させ、P、Q は AB 上に、R、S は 弧AB 上にあるようにせよ。**

((解))　(作図)　AB を一辺とする正方形 ABCD を作り、AB の中点 O と C、D とを結び OC、OD が 弧AB と交わる点を R、S とする。S と R から AB に垂線 SP、RQ をひけば、PQRS は求める正方形である。

(証明)、(吟味) 略す。 □ (ヒント図)

問 4.2.2.6　**扇形OAB がある。これに 正方形PQRS を内接させて、S と R は弧AB 上にあって、P は OA、Q は OB 上にあり、SR // AB となるようにせよ。** (説明図)

問 4.2.2.7　**∠XOY 内に一つの点 A がある。A を通り、OX、OY に接する円を作れ。** (ヒント図)

4.2.3　代数を用いる作図

求めようとする図形の一部分の線分の長さを x とし、x を既知の線分の長さ a、b、c、$\cdots\cdots$ で表し、その式から x の作図をくふうする方法を代数的解法という。

例 4.2.3.1　与えられた $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を 辺BC に平行な線分によって二等分せよ。

((解))　(解析)　求める直線が辺 AB、AC と交わる点を D、E とすれば、$\triangle\mathrm{ADE}$ と $\triangle\mathrm{ABC}$ とは相似であるから

$$\frac{\triangle\mathrm{ADE}}{\triangle\mathrm{ABC}} = \frac{\mathrm{AD}^2}{\mathrm{AB}^2}$$

$\mathrm{AB} = a$、$\mathrm{AD} = x$　とおけば

$$\frac{1}{2} = \frac{x^2}{a^2}$$

ゆえに

$$x^2 = \frac{a^2}{2} = a \cdot \frac{a}{2}$$

よって x は a と $\frac{a}{2}$ との比例中項をである。

(作図)　AB を直径とする半円を作り、AB の中点 M から AB に垂直に引いた直線とこの半円との交点を N とする、AB 上に AN に等しく AD を取り、D から BC に平行線を引いて AC との交点を E とすれば。DE は求める線分である。

(作図)　解は常に一つである。　□ (説明図)

問 4.2.3.1　**与えられた 三角形**ABC **を 底辺**BC **に平行な直線によって三等分せよ。**

問 4.2.3.2　**与えられた円の面積を、同心円によって二等分せよ。**

次に二次方程式の根を作図によって求める方法を調べ、それを他の作図に応用してみよう。

a、b、x **を線分の長さ (正数) とすると、作図で考える** x **の二次方程式は次の型のいずれかで表される。**

$$\text{(i)} \quad x^2 - ax + b^2 = 0$$

$$\text{(ii)} \quad x^2 + ax - b^2 = 0$$

$$\text{(iii)} \quad x^2 - ax - b^2 = 0$$

注意　$x^2 - ax + b^2 = 0$ **は求める** x **がないから考えない。また** x **の一次の項のない方程式** $x^2 = ab$ **は比例中項の作図で学んだ。定数項は** cd **のように、二つの線分の長さの積として表されているときは、比例中項の作図によって** $b^2 = cd$ **となる** b **を求めること**g**できるので、常に上のように変形される。**

上の方程式は書き換えると

$$\text{(i)} \quad x(x - a) = b^2$$

$$\text{(ii)} \quad x(x + a) = b^2$$

$$\text{(iii)} \quad x(x - a) = b^2$$

となるので、これに適する線分の長さ x **は、次の図で示すような方法によって、作図することができる。**　(3 つの作図図)

例 4.2.3.2　**与えられた 線分**AB **上に 点**C **を求め、**AC **を** BC **と** AB **の比例中項となるようにせよ。**

((解)) (解析) $\mathrm{AB}=a$、$\mathrm{AC}=x$ とおくと

$$\mathrm{BC}=a-x$$

ゆえに
$$\mathrm{AC}^2=\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AB}$$

すなわち
$$x(x+a)=a^2$$

(作図)、(吟味) 各自試みよ。 □

$\boxed{\text{注意}}$ 上の例題のように 線分 AB を分けるとき、線分 AB を**黄金分割**するという。線分を黄金分割したとき、二つの部分の割合は美的な感じを与えるので、エジプトやギリシャではこの割合が尊重され、美術品や神殿などに利用されている。

$\boxed{\text{森記}}$ 美術品と神殿を並べるのは、文章としては問題はないが、違和感を抱く。美術品に対応するのは建物であろう。

問 4.2.3.3 a、b を与えられた線分とするとき、次の二次方程式の正の根を作図によって求めよ。

(i) $x^2-ax-a^2=0$

(ii) $x^2-3ax+4b^2=0$

(iii) $x^2+2ax-9b^2=0$

問 4.2.3.4 長さ 1 の線分を適当に定め、次の方程式の正の根を作図によって求めよ。

(i) $x^2-4x+=0$ (ii) $x^2-2x-2=0$

問 4.2.3.5 円 O に内接する正十角形の一辺を AB とし、$\angle$OBA の二等分線が OA と交わる点を D とすれば (説明図)

(i) $\mathrm{OD}=\mathrm{AB}$ (ii) D は OA を黄金分割する。

問 4.2.3.6　**前問の結果を使って円に内接する正十角形および正五角形を作図せよ。**

練習問題 [11]

練習問題 11.1　**二つの円** A、B **と 点** P **がある。正三角形** PQR **を作って、**Q **が 円周** A **上に、**Q **が 円周** B **上にあるようにせよ。** (説明図)

練習問題 11.2　**一つの円** O **と、円外の二つの点** A、B **とがある。この円上に二つの点** P、Q **を求め、**AP = BQ、PQ = ℓ **(定長) となるようにせよ。**

練習問題 11.3　**与えられた 三角形** ABC **と等容積で、底辺** BC **を共有する二等辺三角形をを作れ。**

練習問題 11.4　**与えられた 三角形** ABC **と等積で、頂角** A **を共有する二等辺三角形をを作れ。**

練習問題 11.5　**角** XOY **内に二点** A、B **がある。**OX、OY **上にそれぞれ点** P、Q **を求めて、**AP + PQ + QR **を最小にせよ。**

練習問題 11.6　**点** A **とこれを通らない直線** g **とがある。**g **上の点** P、Q **を取り、** (説明図)

$$\mathrm{PQ} = \ell \qquad \angle\mathrm{PAQ} = \alpha$$

となるようにせよ。

練習問題 11.7　$\triangle$ABC **で頂点** A、B、C **に対する中線の長さ** ℓ、m、n **を知ってこれを作れ。**

練習問題 11.8　四角形の一つの頂点を通る直線によって、その面積を二等分せよ。

練習問題 11.9　与えられた線分を一辺とする正五角形を書け。

練習問題 11.10　対角線と一つの辺との和が定長 ℓ に等しい正方形を作れ。

$\boxed{\text{森記}}$ 筆者が受験した頃の入試問題の幾何は8番や9番の問題のような出題であった。

総合問題 IV

ーーー A ーーー

総合問題 4.A.1　$\angle$XOY の辺 OX、OY 上に内に定点 A、B がある。この角内に 点P をとって、四角形AOBP の面積が一定値 k^2 となるようにするとき、点P の軌跡を求めよ。

総合問題 4.A.2　定円(O, r) と 定線分AB とがある。点P が 円O 上を運動するとき、平行四辺形PABQ を作れば、Q の軌跡は何か。

総合問題 4.A.3　定点 A、B からの距離の平方の和が一定値 k^2 に等しい 点P の軌跡は、AB の中点を中心とする円である。

総合問題 4.A.4　定点 A、B からの距離の平方の差 $\mathrm{AP}^2 = \mathrm{BP}^2$ が一定値 k^2 に等しい 点P の軌跡は、直線 AB に垂直な一つの直線である。

総合問題 4.A.5　二つの円 (O, r)、(O$'$, r') に引いた接線の長さが等しい点の軌跡を求めよ。

総合問題 4.A.6　底辺の長さが a で、この辺に対する高さが h、他の二つの辺の比が $m : n$ である三角形を作れ。

総合問題 4.A.7　底辺BC が 5cm、他の二辺 AB、AC の比が $m : n$ である三角形のうち、面積が最大のものを求めよ。

総合問題 4.A.8　与えられた三つの平行線 a、b、c がこの順にある。a 上の定点 A を一つの頂点とし、残りの二つの頂点 B、C がそれぞれ b、c 上にある正三角形 ABC を作れ。　(説明図)

総合問題 4.A.9　**定円O に内接し、定弦BC を低とする 三角形ABC のうち、その周の最大なものはどんな三角形か。**

―――　B　―――

総合問題 4.B.1　**$\angle$B が 90° の 直角三角形ABC の鋭角の頂点 B、C が、同じ平面上にあって直交する二つの直線 X′OX、Y′OY 上に夫々あるように動くとき、頂点 A の軌跡を求めよ。**　(説明図)

総合問題 4.B.2　**角の二つの辺に至る距離の比が一定比 $m:n$ に等しい点の軌跡を求めよ。**

総合問題 4.B.3　**$4x$△ABC の面積を 辺BC に垂直な直線によって二等分せよ。(x を a、b で表せ。)**　(説明図)

総合問題 4.B.4　**鋭角XOY の 辺OY 上に二点 A、B がある。OX 上に 点P を求め $\angle$APB を最大にせよ、**

また

$$\mathrm{OA} = 4\ \mathrm{cm} \qquad \mathrm{AB} = 5\ \mathrm{cm}$$

のとき、OP の長さをを求めよ。

総合問題 4.B.5　**台形ABCD の 底辺BC に平行な直線を引いて、この面積を二等分せよ。**

総合問題 4.B.6　**正六角形と正十角形の作図法を応用して、正十五角形を書く方法をくふうせよ。($\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ となることに注意せよ。)**

総合問題 4.B.7　**二つの円 (O, r)、(O′, $r′$) を等角に見る 点P の軌跡を求めよ。**　(説明図)

補充問題 [4]

補充問題 4.1　図において $AB = BD = 4$ cm、$AH = DE = 2$ cm、AFGH **は正方形、**BCD **は正三角形とする。今せいほうけいが 折れ線** ABCDE **上をころがるとき**

1)　**頂点**F **の軌跡を求めよ。**

2)　**またその長さを計算せよ。**

(説明図: AHBDE が一直線に、FGC は同じ側)

補充問題 4.2　与えられた 線分AB **を底辺とする面積一定な三角形の重心の軌跡を求めよ。**

補充問題 4.3　二つの線分 AB、CD **を図のように連結し、これを一平面上において** D **を固定する。**B **は 定直線**DX **上を動くとき、点**A **はどんな軌跡を描くか。ただし、**$AC = CD = CB$ **で、**C **および** D **のところは自由に回転できるようにしてある。** (説明図)

補充問題 4.4　一つの円が、その2**倍の半径を持つ円に内接しながらすべることなく回転するとき、小円の定点の軌跡は大円の直系になる。**

(説明図)

補充問題 4.5　二つの点 A、B **で交わる二円引いた接線がひとしい点の軌跡を求めよ。**

補充問題 4.6　正方形ABCD **の辺** CB、CD **上にそれぞれ** E、F **をとり、**$CE = CF$ **ならしめ、**E **から** AF **に垂線を引き、その足を** G **とする。**E **を** BC **上に動かすとき、**G **はどんな線上を動くか。** (説明図)

補充問題 4.7　**定円**O **と 定点**A **とがある。この円周上に二点** B、C **をとり、**$\angle \mathrm{BAC} = 90°$ **となるようにするとき、**BC **の中点** M **の軌跡を求めよ。**

補充問題 4.8　**定円·頂角および残りの二辺の和を知って、三角形を作れ。**

補充問題 4.9　**図のような長方形の紙の内部に三点** A、B、C **があるが、これらの三点から等距離の点** O **は紙面の外にある。作図を紙上で行って** A **から** O **に向かう線分を引きたい。どのように作図すればよいか。**

(問題図)

補充問題 4.10　**右の図の半円形の円弧をその弦を折り目として折り曲げて次のように作図したい。それぞれの場合の折り目の弦を求めよ。**

(問題図)

1)　**円弧がこの直径上の 点**P **でこの直径に接する。**

2)　**円弧上の 点**Q **を通る弦を折り目として曲げたとき**
円弧が直径に接する。